This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

KÉ
8901
HDI
HW 21BQ W

Leitfaden

für den

trigonometrischen und stereometrischen Unterricht

an höheren Bürger- und Realschulen

von

Dr. Karl Schulze,
Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg.

Zweites Heft: Stereometrie.

Mit Figuren im Text.

GEO. W. EVANS.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1890.

Digitized by Google

KE8901

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Börner, Dr. **H.**, Oberlehrer an der Realschule I. O. zu Ruhrort, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie für höhere Schulen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVIII u. 93 S.] gr. 8. 1879. geh. *M.* 1.60.

Brockmann, **F. J.**, vorm. Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. [Mit 46 Holzschnitten im Text.] 2. Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1880. geh. *M.* 1.60.

——— Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 3.60.

Einzeln:

I. Teil. Die Planimetrie. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. 3. verbesserte Aufl. [IX u. 201 S.] 1887. *M.* 2.—

II. — Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 128 S.] 1875. *M.* 1.60.

——— Materialien zu Dreiecks-Konstruktionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh. *M.* 1.20.

——— planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vorschule zu des Verfassers Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. [VI u. 103 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.50.

——— Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. [VI u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.50.

Conradt, Dr. **F.**, Oberlehrer am Gymnasium in Belgard, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie in stufenmäßiger Anordnung für den Schulgebrauch, nebst einer sich eng an dasselbe anschließenden Sammlung von Übungsaufgaben. [VIII u. 176 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 2.—

Dronke, Dr. **A.**, Direktor der Realschule I. O. zu Trier, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Mit Figuren im Text. [IV u. 75 S.] gr. 8. 1881. geh. *M.* 2.—

Erler, Dr., Professor und I. Oberlehrer am Kgl. Pädagogium bei Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima. Mit einer lithographierten Figurentafel. 3. verb. Aufl. [45 S.] gr. 8. 1887. kart. *M.* 1.20.

Frischauf, Dr. **J.**, Professor an der Universität zu Graz, Elemente der Geometrie. 2. Auflage. [VIII u. 164 S. mit eingedr. Holzschnitten.] gr. 8. 1877. geh. *M.* 2.—

Heinze, Dr. **Karl**, weiland Professor in Köthen, genetische Stereometrie. Bearbeitet von Franz Lucke, Gymnasiallehrer in Zerbst. Mit lithographierten Tafeln. [XII u. 194 S.] gr. 8. 1886. geh. *M.* 6.—

Henrici, Julius, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. **P. Treutlein**, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geh. *M.* 7.60.

Einzeln:

I. Teil. Gleichheit der planimetrischen Gröfsen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. [VIII u. 152 S.] 1881. *M.* 2.—

II. — Perspektivische Abbildung und Berechnung der planimetrischen Gröfsen. Pensum für Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. [VIII u. 242 S.] 1882. *M.* 2.80.

[redacted] der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der [redacted]bene auf eine zweite (Kegelschnitte). Pensum für [redacted] Figuren in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] 1883.

Fortsetzung folgt am Ende dieses Buchs.

Digitized by Google

Leitfaden

für den

trigonometrischen und stereometrischen Unterricht

an höheren Bürger- und Realschulen

von

Dr. Karl Schulze,
Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg.

Zweites Heft: Stereometrie.

Mit Figuren im Text.

GEO. W. EVANS.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1890.

Digitized by Google

KE 8901

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
46*217

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Digitized by Google

Vorwort.

Für die Ausarbeitung des vorliegenden Heftes sind dieselben Grundsätze maßgebend gewesen wie für die Trigonometrie.

Die Stereometrie beginnt ihre Betrachtungen mit dem Würfel; die experimentell gewonnene Parallelprojektion desselben wird in Ebenen und Gerade zergliedert. Diese Zergliederung bietet eine Vorbereitung für den ersten Abschnitt, der die Lagenbeziehungen von Ebenen und Geraden in Kürze behandelt. Die körperliche Ecke wird nur erklärt; eine ausführliche Behandlung der Ecke, die doch eigentlich in die sphärische Trigonometrie gehört, kann hier, wo es sich um Beschränkung des Stoffes handelt, um so mehr entbehrt werden. Den Beschluß des ersten Abschnitts bildet der Wiederaufbau des Würfels aus Ebenen und Geraden.

Der zweite Abschnitt führt nach der Definition des Polyeders zunächst die regelmäßigen Körper vor und geht dann zu Inhalts- und Oberflächenbestimmungen der bekannten Körper Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel und Kugel über. Den Inhaltsvergleichungen ist das Cavalierische Prinzip zu Grunde gelegt, das in seiner Einfachheit die Zwecke des Leitfadens wirksam unterstützt. Mit Rücksicht auf die zu erzielende Beschränkung des Stoffes ist das Prismatoid nicht aufgenommen. Dagegen ist dem Kapitel über die Kugel einiges über Kartographie beigefügt (nach Martus, Astronomische Geographie, II. § 5). Auch abgesehen von der Verbindung, die dadurch mit einem andern Fache hergestellt wird, ist die Beantwortung der Frage, wie ein Stück einer Kugeloberfläche durch eine ebene Zeichnung näherungsweise wiedergegeben werden kann, lohnend; ihr kann mit Erfolg eine Lehrstunde gewidmet werden.

Die Aufgaben, die den zweiten Teil des Heftes bilden, behandeln Inhalts- und Oberflächenberechnungen, Zerlegung von Körpern durch Symmetrieebenen, Netzkonstruktionen u. a.; ein großer Teil der Aufgaben ist einfacher Art, einige verhältnismäßig schwierigere bieten Stoff für Geübtere.

Die geschichtlichen Bemerkungen auch dieses Heftes sind größtenteils Cantors Geschichte der Mathematik (Leipzig, Teubner) entnommen.

Schließlich bitte ich, im ersten Hefte S. V, Z. 29 „dritten und" zu streichen und S. 1, Z. 2 zu lesen: $\angle BAC = 30°$.

Hamburg,
Bieberſche Schule, April 1890.

Dr. Karl Schulze.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil: Theorie.

Erster Abschnitt: Lageneziehungen von Geraden und Ebenen.

	Seite
§ 1. Einführung: Zergliederung des Würfels	1
§ 2. Punkt, Gerade, Ebene	3
§ 3. Eine Gerade ist zu einer Ebene senkrecht	4
§ 4. Kennzeichen für die senkrechte Lage	4
§ 5. Umkehrung	5
§ 6. Zwei Gerade sind zu einer Ebene senkrecht	6
§ 7. Umkehrung	7
§ 8. Zwei Gerade sind einer dritten parallel	8
§ 9. Winkel mit parallelen Schenkeln	8
§ 10. Eine Gerade ist zu einer Ebene geneigt	9
§ 11. Lehrsätze über die geneigte Gerade	10
§ 12. Zwei sich schneidende Ebenen	10
§ 13. Eine Ebene ist senkrecht zu einer andern	11
§ 14. Lehrsatz über zwei zu einander senkrechte Ebenen	11
§ 15. Parallelismus	12
§ 16. Kennzeichen für den Parallelismus zweier Ebenen	12
§ 17 Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten geschnitten	13
§ 18. Drei Ebenen. Die körperliche Ecke	13
§ 19. Zur Wiederholung: Aufbau des Würfels	15

Zweiter Abschnitt: Von den Körpern.

§ 20. Polyeder	15
§ 21. Regelmäßige Körper	16
§ 22. Kongruenz, Symmetrie und Inhaltsgleichheit	19
§ 23. Das Prisma	19
§ 24. Rauminhalt des Prisma	20
§ 25. Die Pyramide	22
§ 26. Durchschnittsflächen	22
§ 27. Rauminhalt der Pyramide	23
§ 28. Der Pyramidenstumpf	25
§ 29. Der Cylinder	26
§ 30. Schnittflächen	27
§ 31. Rauminhalt und Mantel des Cylinders	28
§ 32. Der Kegel	28
§ 33. Schnittflächen	29
§ 34. Rauminhalt und Mantel des Kegels	30
§ 35. Der Kegelstumpf	31
§ 36. Die Kugel	33
§ 37. Schnittkreise	33
§ 38. Einiges über Kartographie	34
§ 39. Rauminhalt der Kugel	37
§ 40. Oberfläche der Kugel	38
§ 41. Kugelabschnitt und Ausschnitt. Haube und Zone	39
§ 42. Geschichtliches	40

Zweiter Teil: Aufgaben.

§ 43. Prisma	43
§ 44. Pyramide	47
§ 45. Cylinder	51
§ 46. Kegel	52
§ 47. Kugel	55

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Lagenbeziehungen von Geraden und Ebenen.

§ 1. Einführung: Zergliederung des Würfels.

Die Stereometrie („Körpermessung", griech.) ist derjenige Teil der Mathematik, welcher Konstruktionen und Rechnungen an Körpern ausführt.

Der einfachste Körper ist der Würfel. Er ist wie jeder Körper nach drei Hauptrichtungen (Dimensionen) ausgedehnt (Länge, Breite, Höhe). Er wird von sechs kongruenten Quadraten begrenzt; er hat acht dreiseitige Ecken, zwölf gleich lange, sich rechtwinklig schneidende Kanten.

Mit Hilfe des Sonnenlichtes kann man eine Zeichnung des Drahtmodells eines Würfels folgendermaßen anfertigen.

Man lasse die Sonnenstrahlen senkrecht auf einen weißen Schirm fallen. Dann entsteht von dem vor dem Schirme sich befindlichen Drahtmodelle ein Schattenbild, das man auf dem Schirme fixieren kann. Die so entstehende Zeichnung nennt man eine senkrechte Parallel-Projektion des Würfels. Fallen die Sonnenstrahlen schräg auf den Schirm, so erhält man eine schräge Parallel-Projektion.

Fig. 1.

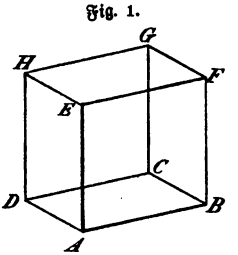
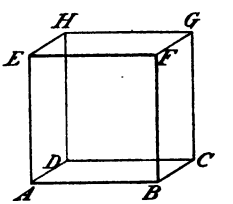


Fig. 2.



Beobachtungen an Fig. 1 und 2: Durch zwei Punkte, etwa A und D, lassen sich beliebig viele Ebenen legen, z. B. $ADCB$, $ADHE$.

Durch drei Punkte, A, B, D, die nicht in gerader Linie liegen, ist nur eine Ebene möglich, $ABCD$.

Digitized by Google

Durch vier Punkte ist nicht immer eine Ebene möglich.

Durch eine Gerade, AE, sind beliebig viele Ebenen möglich.

Durch zwei Gerade, die von demselben Punkte ausgehen, z. B. AE und AB, ist eine Ebene möglich, $ABFE$.

Durch zwei sich nicht schneidende Gerade, wie AE und BF, läßt sich eine Ebene legen. Die Geraden sind parallel.

Durch zwei sich nicht schneidende Gerade, wie AE und BC, läßt sich keine Ebene legen. Diese Geraden kreuzen sich.

Zergliederung der Zeichnung Fig. 2. Die Figur 2 zeigt:

1. Ebenen, die zu einander senkrecht stehen bezw. sich senkrecht durchschneiden, z. B. Fig. 3 und Fig. 3a.

Fig. 3.

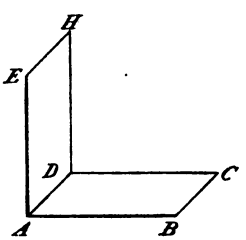
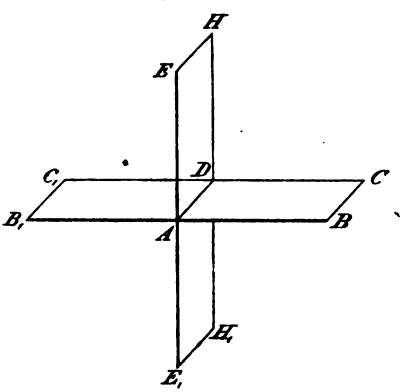


Fig. 3a.



2. Gerade, die zu einer Ebene senkrecht stehen, z. B. Fig. 4 und Fig. 4a.

Fig. 4.

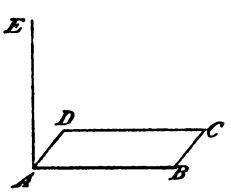
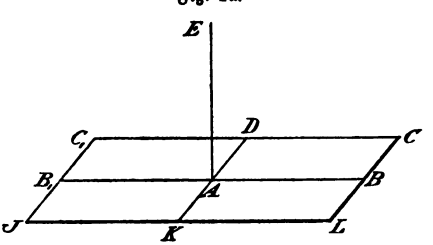


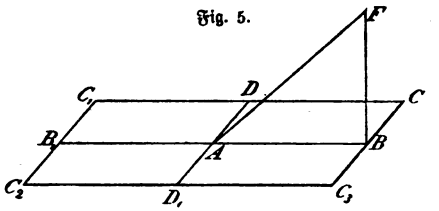
Fig. 4a.



Digitized by Google

3. Gerade, die zu einer Ebene geneigt sind, z. B. Fig. 5.

Fig. 5.



4. Ebenen, die zu einander geneigt sind, z. B. Fig. 6 und Fig. 6a.

Fig. 6.

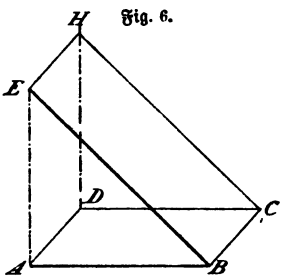
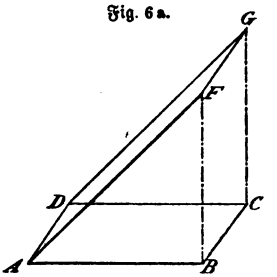


Fig. 6a.



§ 2. Punkt, Gerade, Ebene.

I. Die Grenzen eines Körpers sind Flächen (ebene oder krumme). Die Grenzen einer Fläche sind Linien (gerade oder krumme). Die Grenzen von Linien sind Punkte.

II. Die Ebene.

Erklärung: Eine Fläche wird Ebene genannt, wenn sich in ihr nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen lassen.

Daraus folgt:

Die Schnittlinie zweier Ebenen ist eine Gerade.

Grundsatz über die Ebene: Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich eine und nur eine Ebene legen.

Folgerungen: Eine Ebene läßt sich außerdem legen

1. durch zwei sich schneidende Gerade;

Digitized by Google

2. durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt;
3. durch zwei parallele Gerade.

Bemerkung: Zwei sich nicht schneidende Gerade, welche nicht in einer Ebene liegen, heißen windschief oder sich kreuzend.

III. Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen.

Eine { Gerade / Ebene } kann zu einer Ebene { senkrecht / geneigt / parallel } sein.

Der Punkt, in dem eine Gerade eine Ebene trifft, heißt ihr Fußpunkt.

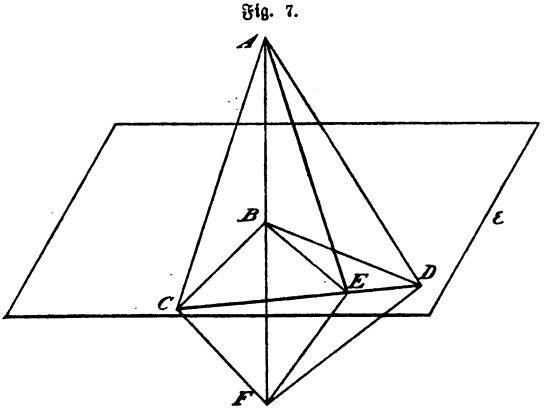
§ 3. Eine Gerade ist zu einer Ebene senkrecht.

Erklärung: Eine Gerade nennt man zu einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Strahlen rechte Winkel bildet.

§ 4. Kennzeichen für die senkrechte Lage.

Lehrsatz: Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Strahlen rechte Winkel bildet. (Fig. 7.)

Fig. 7.



Digitized by Google

Voraussetzung: 1) $AB \perp BC$,
2) $AB \perp BD$.

Behauptung: $AB \perp \varepsilon$.

Beweis: Ziehe aus B in ε einen beliebigen Strahl, etwa BE, und zeige, daß $AB \perp BE$ ist.

Zu diesem Zwecke begrenze man die drei von B ausgehenden Strahlen durch eine beliebige Gerade CD, verlängere AB über B hinaus um sich selbst bis F und verbinde sowohl A als auch F mit D, E und C. Dann ist:

1) $\triangle ABD \cong \triangle FBD$; also $AD = FD$.

2) $\triangle ABC \cong \triangle FBC$; also $AC = FC$.

3) $\triangle ACD \cong \triangle FCD$; folglich $\angle ACE = \angle FCE$.

4) $\triangle ACE \cong \triangle FCE$; demnach $AE = FE$.

5) $\triangle ABE \cong \triangle FBE$; also $\angle ABE = \angle FBE$.

Die letzte Folgerung besagt, daß die Winkel ABE und FBE rechte sind, d. h. $AB \perp BE$. BE ist beliebig aus B in ε gezogen; daher steht AB auf allen aus B in ε gezogenen Strahlen senkrecht, demnach $AB \perp \varepsilon$.

Zusatz 1. Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Punkten (A und F) gleichweit entfernt sind, ist eine Ebene (ε).

Zusatz 2. Auf einer Ebene kann aus einem Punkte nur eine Senkrechte errichtet werden.

§ 5. Umkehrung.

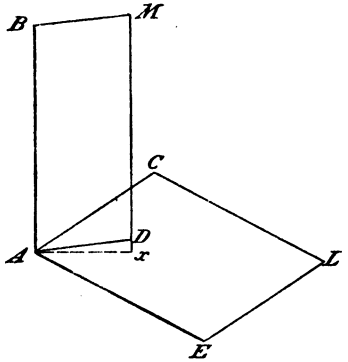
Durch einen von einem Punkte ausgehenden Strahl lassen sich beliebig viele Ebenen legen; durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen läßt sich eine und nur eine Ebene legen. Auf die Frage, ob und unter welchen Bedingungen sich auch durch drei von einem Punkte ausgehende Strahlen eine Ebene legen läßt, antwortet der folgende

Lehrsatz: Steht eine Gerade auf drei von einem Punkte ausgehenden Strahlen senkrecht, so liegen diese in einer Ebene. (Fig. 8.)

Digitized by Google

Voraussetzung: $AB \perp AC, AD, AE$.
Behauptung: AC, AD, AE liegen in einer Ebene.

Fig. 8.



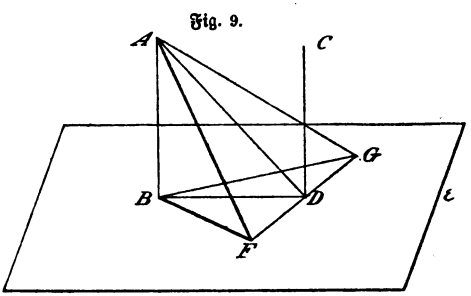
Beweis: Zwei Strahlen, z. B. AC und AE, bestimmen immer eine Ebene, $AELC$. In diese muß auch der dritte Strahl AD fallen. Angenommen AD fiele nicht in diese Ebene, dann würde die durch AB und AD bestimmte Ebene $ADMB$ die erste Ebene $AELC$ in einer Linie AX schneiden, die von AD verschieden wäre. Dann wäre aber nicht nur $\angle BAD = R$, sondern auch (nach § 4) $\angle BAX = R$; also wäre sowohl AD als auch AX auf AB in A senkrecht. Dies ist unmöglich. Also ist die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

Zusatz: Dreht sich ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene.

§ 6. Zwei Gerade sind zu einer Ebene senkrecht.

Lehrsatz: Stehen zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sind sie parallel. (Fig. 9.)

Fig. 9.



Voraussetzung:
1) $AB \perp \varepsilon$,
2) $CD \perp \varepsilon$.

Behauptung:
$AB \parallel CD$.

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt: $AB \perp BD$ und $CD \perp BD$.

Digitized by Google

Da demnach AB und CD auf der dritten Geraden BD senkrecht stehen, so müssen sie (aus planimetrischen Gründen) parallel sein, wenn sich zeigen läßt, daß sie in einer und derselben Ebene liegen. AB und CD werden aber in einer Ebene liegen, wenn sich beweisen läßt, daß die drei von D ausgehenden Strahlen DA, DB, DC in einer Ebene liegen. Um dies zu zeigen, ziehe man aus D in ε senkrecht zu BD einen Strahl DF und beweise, daß er nicht nur mit BD (Konstruktion) und CD (2. Voraussetzung) rechte Winkel bildet, sondern auch mit AD. Verlängere hierzu DF über D hinaus um sich selbst bis G und ziehe AF, BF, AG, BG. Dann ist:

1) $\triangle BDF \cong \triangle BDG$; also $BF = BG$.

2) $\triangle ABF \cong \triangle ABG$; also $AF = AG$.

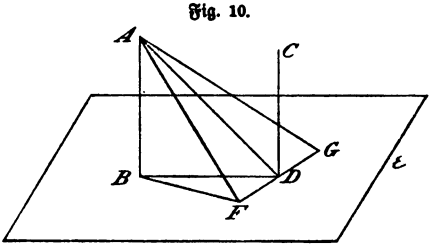
3) $\triangle ADF \cong \triangle ADG$; also $\angle ADF = ADG$, d. h. $DF \perp AD$.

Demnach bildet DF mit den Strahlen DA, DB, DC rechte Winkel; diese Strahlen liegen also in einer Ebene, der natürlich auch AB angehört. Folglich sind AB und CD parallel, da sie in der Ebene $ABCD$ auf BD senkrecht stehen.

§ 7. Umkehrung.

Lehrsatz: Ist von zwei Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht, so ist es auch die andere. (Fig. 10.)

Fig. 10.



Voraussetzung:

1) $AB \parallel CD$,

2) $AB \perp \varepsilon$.

Behauptung:

$CD \perp \varepsilon$.

Beweis: Ziehe BD. Dann ist $ABDC$ eine Ebene (1. Voraussetzung), folglich $CD \perp BD$. Ziehe $DF \perp BD$ in ε und zeige, daß CD auch auf DF senkrecht steht. Zu dem

Digitized by Google

Zwecke verlängere man DF um sich selbst bis G und ziehe AF, BF, AG, BG; dann ist auch hier wieder:

1) $\Delta BDF \cong \Delta BDG$; folglich $BF = BG$.
2) $\Delta ABF \cong \Delta ABG$; folglich $AF = AG$.
3) $\Delta ADF \cong \Delta ADG$; folglich $\angle ADF = \angle ADG$, d. h. $FD \perp AD$.

Also steht FD auf DB und DA, mithin auf der Ebene $ABDC$, demnach auch auf der Geraden CD senkrecht; folglich bildet CD mit den beiden Strahlen DB und DF der Ebene ε rechte Winkel. CD steht also auf ε senkrecht.

§ 8.

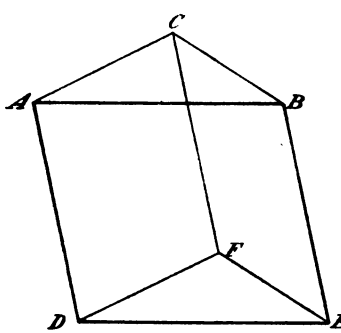
Lehrsatz: Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis: Lege zu einer von den beiden Geraden eine senkrechte Ebene und benutze die Ergebnisse der beiden vorigen Paragraphen.

§ 9. Winkel mit parallelen Schenkeln.

Lehrsatz: Winkel, deren Schenkel paarweise in derselben Richtung parallel laufen, sind gleich groß. (Fig. 11.)

Fig. 11.



Voraussetzung:

1) $AB \parallel DE$,
2) $AC \parallel DF$.

Behauptung:

$\angle A = \angle D$.

Beweis: Mache $AB = DE$, $AC = DF$. Lege durch AB und DE die Ebene $ABED$, durch AC und DF die Ebene $ACFD$. Dann ist $AB \parallel DE$, also $ABED$ ein Parallelogramm und $BE \parallel AD$; $AC \parallel DF$, also $ACFD$ ein Parallelogramm und $CF \parallel AD$.

Digitized by Google

Hieraus folgt, daß BE und CF nicht nur gleich, sondern auch parallel (§ 8) sind. Daher ist auch $BCFE$ ein Parallelogramm, und also $BC = EF$. Folglich stimmen die Dreiecke ABC und DEF in ihren drei Seiten überein und mithin ist $\angle BAC = \angle EDF$.

§ 10. Eine Gerade ist zu einer Ebene geneigt.

Erklärung: Eine Gerade ist zu einer Ebene geneigt, wenn sie nicht mit allen aus ihrem Fußpunkte in der Ebene gezogenen Strahlen rechte Winkel bildet.

Fig. 12.

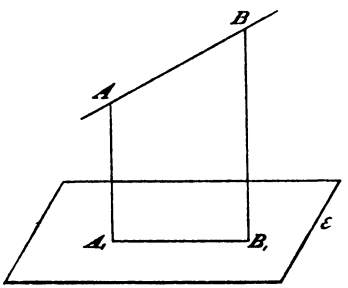
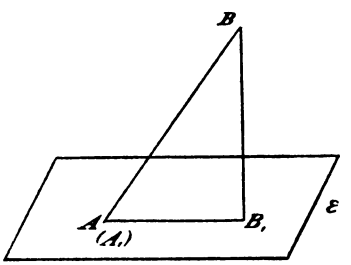


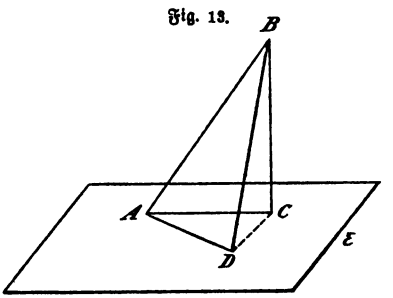
Fig. 12a.



Fällt man aus zwei Punkten einer Geraden, A und B, Senkrechte auf eine Ebene, AA_1 und BB_1, so heißt die Verbindungslinie der Fußpunkte, A_1B_1, die Projektion von AB auf die Ebene. (Fig. 12 und Fig. 12a.)

Erklärung: Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene ist der Winkel, den sie mit ihrer Projektion bildet.

Fig. 13.



Lehrsatz: Der Neigungswinkel einer zu einer Ebene geneigten Geraden ist der kleinste von allen Winkeln, die sie mit den aus ihrem Fußpunkte in der Ebene gezogenen Strahlen bilden kann. (Fig. 13.)

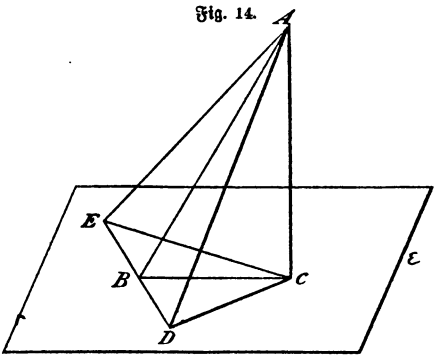
Digitized by Google

Beweis: Ziehe in ε $AD = AC$. Dann ist in den Dreiecken ABC und ABD: 1) $AB = AB$; 2) $AC = AD$; aber 3) $BD > BC$ (warum?); folglich auch $\angle BAD > \angle BAC$.

§ 11.

1) Lehrsatz: Zieht man aus dem Fußpunkte einer zu einer Ebene geneigten Geraden zu ihrer Projektion in der Ebene die senkrechte Gerade, so ist diese auch zu der geneigten Geraden senkrecht. (Fig. 14.)

Fig. 14.



Voraussetzung:

1) $AC \perp \varepsilon$,

2) $BD \perp BC$.

Behauptung:

$BD \perp AB$.

Beweis: Verlängere BD um sich selbst bis E, ziehe AD, AE, CD, CE.

Dann ist:

1) $\triangle CBD \cong \triangle CBE$; folglich $CD = CE$.

2) $\triangle ACD \cong \triangle ACE$; folglich $AD = AE$.

3) $\triangle ABD \cong \triangle ABE$; folglich $\angle ABD = \angle ABE$, d. h. $BD \perp AB$.

2) Umkehrung: Die auf einer geneigten Linie aus ihrem Fußpunkte in der Ebene errichtete Senkrechte ist auch auf der Projektion der Geraden senkrecht.

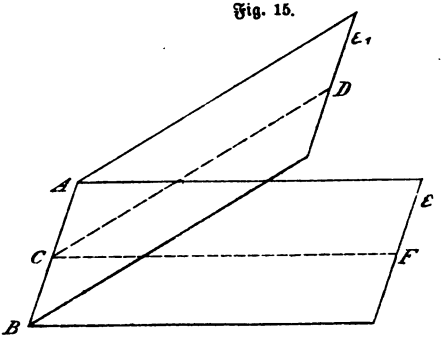
§ 12. Zwei sich schneidende Ebenen.

Einführung: Die durch AB gelegte Ebene ADE des vorigen Paragraphen ist gegen die Ebene ε geneigt; die Größe der Neigung beider Ebenen wird durch den Winkel ABC angegeben; seine Schenkel AB und BC liegen in je einer der Ebenen und stehen auf der Durchschnittslinie der Ebenen, DE, senkrecht. Der Winkel ABC heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Digitized by Google

Erklärung: 1) Die Größe der Neigung zweier sich schneidender Ebenen gibt der Winkel an, welchen zwei aus einem Punkte der Schnittlinie auf dieser in beiden Ebenen errichtete Senkrechte bilden (Neigungswinkel). Er hat überall dieselbe Größe, an welchem Punkte der Schnittlinie man ihn auch konstruieren mag. (§ 9.)

Fig. 15.



2) (Besonderer Fall.) Zwei Ebenen stehen senkrecht zu einander, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist.

§ 13.

Lehrsatz: Legt man durch eine auf einer Ebene errichtete Senkrechte eine beliebige Ebene, so steht diese auf der ersteren Ebene senkrecht. (Fig. 16.)

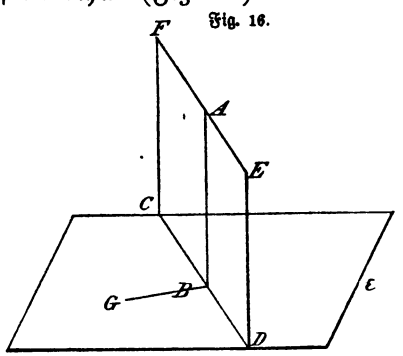
Voraussetzung:

$AB \perp \varepsilon$.

Behauptung:

$CDEF \perp \varepsilon$.

Fig. 16.



Beweis: Ziehe in ε $BG \perp CD$; dann ist $\angle ABG = R$ (Voraussetzung). Dieser Winkel ABG ist aber auch der Neigungswinkel der beiden Ebenen, da $BG \perp CD$ (Konstruktion) und $AB \perp CD$ (Voraussetzung) ist.

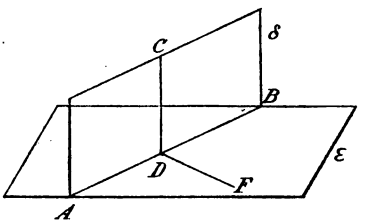
§ 14.

Lehrsatz: Errichtet man auf der Schnittlinie zweier sich rechtwinklig schneidender Ebenen in der einen

Digitized by Google

die Senkrechte, so ist diese auch auf der anderen Ebene senkrecht. (Fig. 17.)

Fig. 17.



Voraussetzung:

1) $\delta \perp \varepsilon$.

2) $CD \perp AB$.

Behauptung: $CD \perp \varepsilon$.

Beweis:

Ziehe in ε $DF \perp AB$; dann ist $\angle CDF$ der Neigungswinkel beider Ebenen (warum?) und gleich einem rechten (Grund?). Daher ist CD 1) $\perp AB$, 2) $\perp DF$, folglich $CD \perp \varepsilon$.

§ 15. Parallelismus.

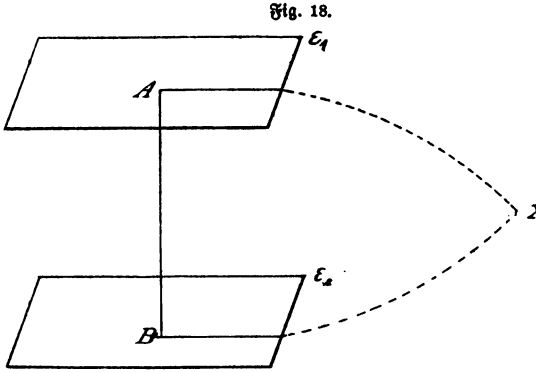
1) Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn beide keinen Punkt gemeinsam haben, soweit man sie auch verlängern bezw. erweitern mag.

2) Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, soweit man sie auch erweitern mag.

§ 16. Kennzeichen für den Parallelismus zweier Ebenen.

Lehrsatz: Zwei Ebenen sind parallel, wenn eine Gerade auf beiden senkrecht steht. (Fig. 18.)

Fig. 18.



Voraussetzung:

1) $AB \perp \varepsilon_1$,

2) $AB \perp \varepsilon_2$.

Behauptung:

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

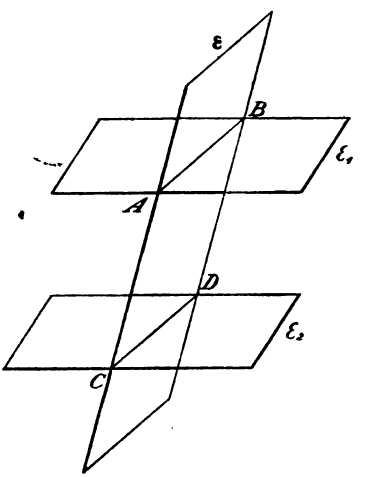
Digitized by Google

Beweis (indirekt): Angenommen, die beiden Ebenen hätten einen Punkt, etwa X, gemeinsam. Dann wären AX und BX gerade Linien (Grund?) und die Winkel XAB und XBA rechte (Grund?); also wären in dem Dreiecke ABX zwei Winkel rechte. Das widerspricht aber dem Satze von der Winkelsumme eines Dreiecks. Also ist die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

§ 17.

Lehrsatz: Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten Ebene in parallelen Durchschnittslinien geschnitten. (Fig. 19.)

Fig. 19.



Voraussetzung:

1) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$,
2) AB und CD Durchschnittslinien mit ε.

Behauptung:

$AB \parallel CD$.

(Beweis indirekt.)

§ 18. Drei Ebenen. Die körperliche Ecke.

Drei Ebenen können folgende Lagen zu einander haben:

1. Sie sind einander parallel.
2. Zwei sind parallel und werden von der dritten geschnitten (vergl. § 17).
3. Sie schneiden sich in drei parallelen Geraden. Die Ebenen schließen dann einen prismatischen Raum ein. (Fig. 20.)
4. Sie schneiden sich in einer Geraden. (Fig. 21.)
5. Sie schneiden sich in einem Punkte. In diesem Falle bilden sie eine dreiseitige körperliche Ecke. (Ecke A, Fig. 22.)

Digitized by Google

Erklärung: Schneiden sich n Ebenen in einem Punkte, so bilden sie eine n-seitige körperliche Ecke.

Bezeichnungen: Die n Ebenen schneiden sich in n Kanten, die von dem den Ebenen gemeinsamen Punkte, dem Scheitelpunkte, ausgehen. Die von den Kanten gebildeten Winkel heißen Kantenwinkel („Seiten"), die von den Ebenen gebildeten Winkel nennt man Flächenwinkel („Winkel").

Fig. 20.

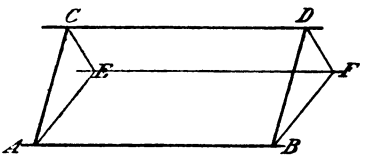


Fig. 21.

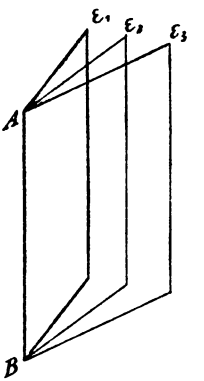
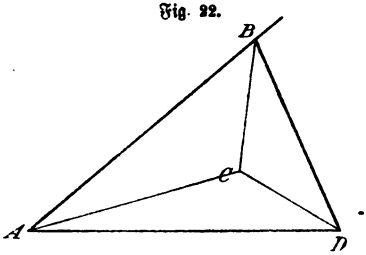


Fig. 22.



Kongruenz zweier Ecken: Zwei Ecken heißen kongruent, wenn sie sich so ineinander gelegt denken lassen, daß die gleichliegenden („homologen") Stücke sich decken.

Scheitelecke: Verlängert man die Kanten einer (etwa dreiseitigen) Ecke über den Scheitelpunkt hinaus, so bilden die Verlängerungen die Kanten einer neuen Ecke, der Scheitelecke der ersteren. Die entsprechenden Stücke der Ecke und ihrer Scheitelecke sind einander gleich. Die Ecken sind indes nicht kongruent, sondern symmetrisch: Die einander entsprechenden Stücke sind nämlich nicht in derselben Aufeinanderfolge gleich, sondern in entgegengesetzter Richtung.

(Symmetrisch gleich sind unsre beiden Hände: jede Hand hat ihren eigenen Handschuh nötig; zwar stimmt die Größe der einzelnen Finger überein, aber die Aufeinanderfolge der Stücke

Digitized by Google

an der einen Hand ist entgegengesetzt der Reihenfolge der entsprechenden Stücke an der andern. Symmetrisch gleich sind ferner ein Körper und sein Spiegelbild.)

§ 19. Zur Wiederholung des ersten Abschnittes: Aufbau des Würfels.

Errichte auf dem Quadrate $ABCD$ die Lote AE und BF, zunächst von beliebiger Länge. Warum ist 1) $AE \perp AB$ und $\perp AD$? 2) $BF \perp AB$ und $\perp BC$? 3) $AE \parallel BF$? Errichte ferner CG und $DH \perp ABCD$. Was gilt von diesen beiden Loten? Gib nun den drei Loten AE, BF, DH die Länge von AB. Was ist durch die Punkte E, F, H bestimmt? Welches Stück schneidet die durch E, F, H bestimmte Ebene von dem vierten Lote CG ab? Warum ist Ebene $EFGH \parallel$ Ebene $ABCD$? Warum ist $EFGH \perp ADHE$ und $\perp ABFE$? Warum ist $AD \perp ABFE$? $DC \parallel ABFE$? Der entstandene Körper $ABCDEFGH$ ist ein Würfel (Hexaeder oder Sechsflächner).

Zweiter Abschnitt.

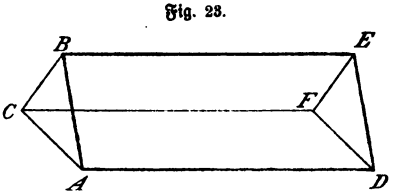
Von den Körpern.

---

§ 20. Polyeder.

Drei Ebenen mögen sich in drei parallelen Geraden schneiden; es entsteht ein prismatischer Raum. Begrenzt man diesen an den beiden offenen Seiten durch zwei einander parallele Ebenen (Dreiecke), so heißt der entstehende Körper ein dreiseitiges Prisma. Die Dreiecke ABC und DEF heißen Grundflächen; die Parallelogramme sind die Seitenflächen des Prisma. (Fig. 23.)

Fig. 23.

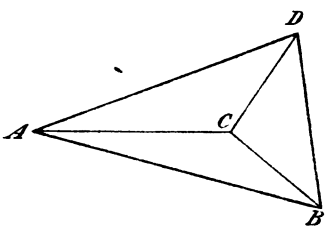


Digitized by Google

Allgemein: Schneiden sich n Ebenen in parallelen Geraden, und begrenzt man den entstehenden Raum durch zwei parallele Ebenen (n-seitige Polygone), so entsteht ein n-seitiges Prisma.

Drei Ebenen mögen sich in einem Punkte schneiden (vergl. § 18); es entsteht eine dreiseitige Ecke A. Begrenzt man diese durch eine Ebene (Dreieck), so entsteht eine dreiseitige Pyramide. (Fig. 24.) A heißt Spitze, $\triangle BCD$ Grundfläche; die übrigen Dreiecke heißen Seitenflächen.

Fig. 24.



Allgemein: Begrenzt man eine n-seitige Ecke durch eine Ebene (ein n-seitiges Polygon), so entsteht eine n-seitige Pyramide.

Alle die genannten Körper werden von Ebenen begrenzt.

Erklärung: Jeder durch Ebenen begrenzte Körper heißt Polyeder (Vielflächner).

§ 21. Regelmäßige Körper.

Erklärung: Ein regelmäßiger oder Platonischer Körper ist ein solches Polyeder, das von regelmäßigen Polygonen derselben Art begrenzt wird, welche in kongruenten Ecken zusammenstoßen.

Übersicht über die 5 regelmäßigen Körper.

Nr.	Name	Zahl und Art der Grenzflächen	Zahl und Art der Ecken	Kanten
1.	Tetraeder	4 gleichseit. Dreiecke	4 dreiseit. Ecken	6
2.	Oktaeder	8 gleichseit. Dreiecke	6 vierseit. Ecken	12
3.	Ikosaeder	20 gleichseit. Dreiecke	12 fünfseit. Ecken	30
4.	Hexaeder	6 gleichseit. Vierecke	8 dreiseit. Ecken	12
5.	Dodekaeder	12 gleichseit. Fünfecke	20 dreiseit. Ecken	30

Digitized by Google

Ergänzungen zu der Tabelle.

1. Das Tetraeder (Vierflächner): Fig. 25.

Fig. 25.

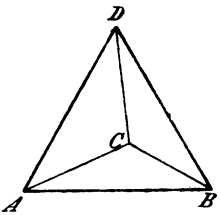
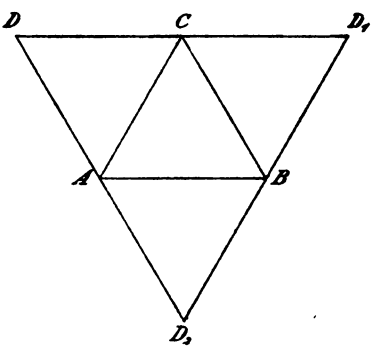


Fig. 26.



Denkt man sich die Dreiecke ABD, ACD, BCD in dieselbe Ebene hinabgeklappt, in welcher ABC liegt, so bilden die vier nun nebeneinander liegenden Dreiecke das Netz des Tetraeders. (Fig. 26.) Aus dem Netz kann man ein Tetraeder anfertigen.

2. Das Oktaeder (Achtflächner): Fig. 27. Das Netz findet sich in Fig. 28.

Fig. 27.

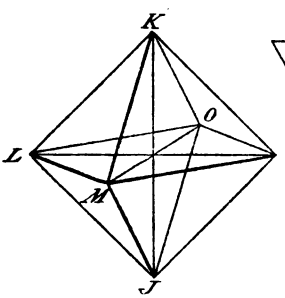
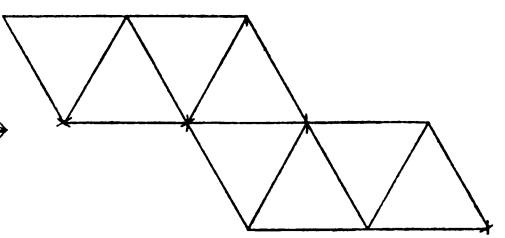


Fig. 28.



3. Das Hexaeder (Würfel, Kubus): Fig. 29. Ein Würfelnetz zeigt Fig. 30.

4. Das Ikosaeder (Zwanzigflächner): Fig. 31.

5. Das Dodekaeder (Zwölfflächner): Fig. 32.

Bemerkung: Es gibt nur fünf regelmäßige Körper. Dies läßt sich in folgender Weise klar machen. Ein Polyeder wird von einer Anzahl körperlicher Ecken gebildet. Zur Bildung

Digitized by Google

einer Ecke dienen geradlinige Figuren, Dreiecke, Vierecke u.s.w. Eine Ecke kann aber nur zu stande kommen, wenn die Summe der „Seiten", die in der zu bildenden Ecke zusammenstoßen, kleiner als $4R$ ist; würde sie nämlich $4R$ erreichen, so würde keine Ecke mehr entstehen, sondern sämtliche Figuren würden in eine Ebene fallen.

Fig. 29.

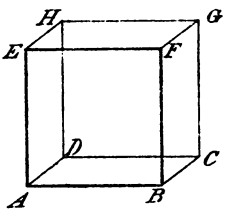
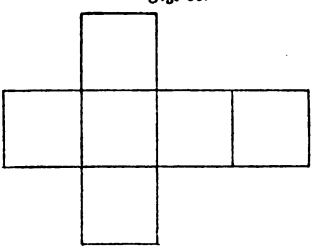


Fig. 30.



Wählt man nun zum Aufbau eines regelmäßigen Körpers kongruente gleichseitige Dreiecke, so stoßen in jeder Ecke Winkel von 60^0 zusammen. Es sind aber die Vielfachen 3.60^0, 4.60^0, 5.60^0 kleiner als $4R$, dagegen ist $6.60^0 = 4R$. Also können aus regelmäßigen Dreiecken gebildet werden drei-, vier- und fünfseitige Ecken. Die entstehenden Körper sind Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder.

Fig. 31.

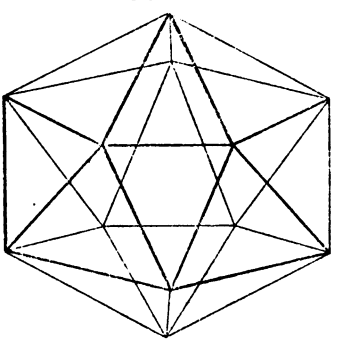
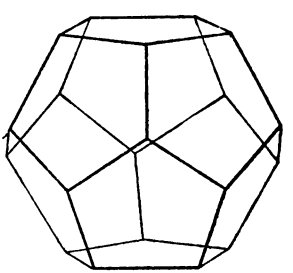


Fig. 32.



Nimmt man regelmäßige Vierecke, so stoßen in der Ecke Winkel von 90^0 zusammen. Es ist nun $3.90^0 < 4R$, aber schon $4.90^0 = 4R$. Also kann aus Quadraten nur eine drei-

Digitized by Google

seitige Ecke gebildet werden. Es entsteht der Würfel. Das regelmäßige Fünfeck hat Winkel von 108°; es ist $3 . 108^0 < 4R$; $4 . 108^0 > 4R$. Also läßt sich aus regelmäßigen Fünfecken nur eine dreiseitige Ecke konstruieren. Es entsteht das Dodekaeder.

Das regelmäßige Sechseck mit seinem Winkel von 120° kann nicht mehr benutzt werden, da schon $3 . 120^0 = 4R$ ist.

§ 22. Kongruenz, Symmetrie und Inhaltsgleichheit zweier Körper.

1. Kongruenz. Zwei Körper werden kongruent genannt, wenn sie sich so ineinander gelegt denken lassen, daß ihre homologen Ecken sich decken.

2. Symmetrie. Zwei Körper sind symmetrisch, wenn zwar die einzelnen Bestandteile des einen Körpers den entsprechenden des andern Körpers gleich sind, aber ihre Aufeinanderfolge in dem einen Körper entgegengesetzt der Aufeinanderfolge in dem andern Körper ist (vergl. § 18). Ebenen, welche einen Körper in symmetrische Hälften teilen, heißen Symmetrieebenen.

3. Inhaltsgleichheit. Cavalieris* Grundsatz: Zwei Ebenen sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, und wenn außerdem die durch die beiden Körper parallel zu den Grundflächen in gleicher Entfernung von diesen gelegten Durchschnittsfiguren inhaltsgleich sind.

§ 23. Das Prisma.

A. Erklärung: Ein Prisma ist ein Polyeder, welches von zwei parallelen und kongruenten Polygonen als Grundflächen und von soviel Parallelogrammen, wie die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen begrenzt wird. (Fig. 33 bis 35.)

Man unterscheidet Grund- und Seitenkanten.

---

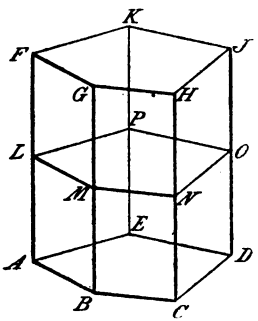
* Cavalieri, Bonaventura, * 1598, † 1647 zu Bologna, war seit 1629 Professor der Mathematik in Bologna.

Digitized by Google

Höhe eines Prisma ist der Abstand der beiden Grundflächen.

Ein gerades Prisma ist ein Prisma, dessen Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen.

Fig. 33.



Ein regelmäßiges Prisma ist ein gerades Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Polygone sind.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt Parallelepipedon.

Besondere Formen sind: Der Würfel, die quadratische Säule, die rechteckige Säule.

B. Lehrsatz: In einem Prisma ist jede der Grundfläche parallele Durchschnittsfigur der Grundfläche kongruent. (Fig. 33.)

Fig. 34.

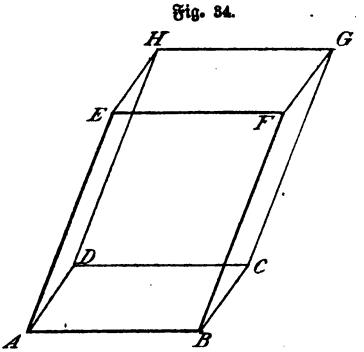
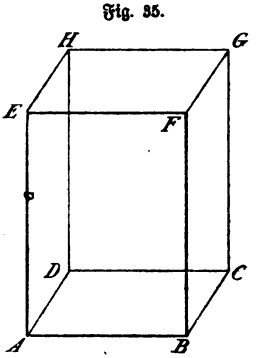


Fig. 35.



Beweis: Es läßt sich zeigen, daß (vergl. Fig. 33) die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche sowohl in den Seiten als auch in den Winkeln übereinstimmt: $LM = AB$, $MN = BC$ u. s. w., $\angle LMN = \angle ABC$, u. s. w. (Grund?)

§ 24. Der Rauminhalt des Prisma.

A Inhaltsgleichheit zweier Prismen.

Lehrsatz: Prismen mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

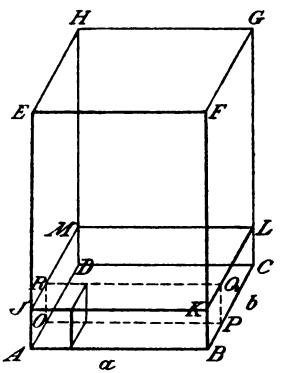
Digitized by Google

Beweis: Auch die zweite Bedingung des Cavalieriſchen Grundſatzes von der Inhaltsgleichheit zweier Körper iſt hier erfüllt: Die in gleichen Höhen parallel zu den Grundflächen durch die Prismen gelegten Durchſchnittsfiguren ſind inhaltsgleich.

B. Der Rauminhalt einer rechteckigen Säule.

In der Ecke A einer rechteckigen Säule mögen die Kanten $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$ zuſammenſtoßen. (Fig. 36.) Man zerlege die Säule parallel zur Grundfläche in ſoviel Scheiben, als die Höhe AE Maßeinheiten hat; alſo iſt die Zahl dieſer Scheiben c. Jede Scheibe zerlege man in Stäbe (quadratiſche Säulen); ihre Anzahl ſei b. Jeden Stab endlich zerlege man in a Würfel oder Raumeinheiten. Alsdann hat

Fig. 36.



jeder Stab a
jede Scheibe ab
die ganze Säule abc
} Raumeinheiten.

Regel: Der Rauminhalt einer rechteckigen Säule iſt gleich dem Produkte der drei in einer Ecke zuſammenſtoßenden Kanten:

$$V = abc;$$

oder, da ab den Inhalt der Grundfläche bedeutet, gleich dem Produkte aus Grundfläche (ab) und Höhe (c).

Bemerkung: Längeneinheit iſt die Strecke (m, cm, mm).
Flächeneinheit iſt das Quadrat (qm, qcm, qmm).
Raumeinheit iſt der Würfel (cbm, ccm, cmm).

Zuſatz: Sind die Kanten inkommenſurabel, ſo läßt ſich die Maßeinheit ſo klein wählen, daß der berechnete Inhalt eine für die Praxis genügende Genauigkeit beſitzt.

Digitized by Google

C. Rauminhalt eines beliebigen Prisma.

Ein beliebiges Prisma kann man sich in eine inhaltsgleiche rechteckige Säule mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandelt denken. Die für diese Säule gültige Inhaltsregel („Grundfläche mal Höhe") läßt sich demnach auf jedes Prisma übertragen:

Der Rauminhalt eines Prisma ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe. In Formel:

$$V = g \cdot h,$$

wenn g den Inhalt der Grundfläche, h die Höhe bedeutet.

Besonderer Fall: Der Inhalt eines Würfels (Kubus) mit der Kante a ist gleich der dritten Potenz von a, a^3. Daher bedeutet a^3 geometrisch den Inhalt eines Würfels mit der Kante a und wird deshalb auch vielfach noch gelesen „a Kubus"; eine Umkehrung von a^3, $\sqrt[3]{a}$, wird meistens die Kubikwurzel aus a genannt.

§ 25. Die Pyramide.

Erklärung: Eine Pyramide ist ein Polyeder, das von einem Polygon als Grundfläche und von so vielen sich in einem Punkte (der „Spitze") schneidenden Dreiecken als Seitenflächen, wie die Grundfläche Seiten hat, begrenzt wird.

Höhe einer Pyramide ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche.

Eine regelmäßige Pyramide ist eine solche, deren Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist, und deren Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind.

Das regelmäßige Tetraeder ist eine gleichseitige Pyramide; das regelmäßige Oktaeder ist eine Doppelpyramide.

§ 26. Durchschnittsflächen.

1. Lehrsatz: In jeder Pyramide ist eine zur Grundfläche parallele Durchschnittsfigur der Grundfläche ähnlich. (Fig. 37.)

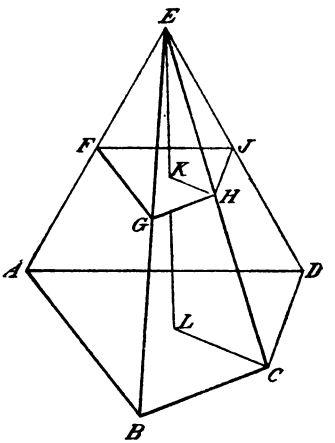
Digitized by Google

Voraussetzung: $FGHJ \parallel ABCD$.

Behauptung: $FGHJ \sim ABCD$.

Beweis: Es ist $GH \parallel BC$, $FG \parallel AB$ (Grund?); folglich ist $\angle FGH = \angle ABC$; ebenso ist $\angle GHJ = \angle BCD$ u. s. w.

Fig. 37.



2. Lehrsatz: In jeder Pyramide verhalten sich die Grundfläche und eine ihr parallele Durchschnittsfläche zu einander wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Voraussetzung:

$FGHJ \parallel ABCD$.

Behauptung:

$ABCD : FGHJ = EL^2 : EK^2$.

Beweis: Da beide Polygone ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate homologer Seiten, also verhält sich

$$ABCD : FGHJ = BC^2 : GH^2.$$

Nun verhält sich aber

$$BC : GH = EC : EH,$$

und weiter $EC : EH = EL : EK$;

folglich $BC : GH = EL : EK$,

und $BC^2 : GH^2 = EL^2 : EK^2$.

Demnach verhält sich

$$ABCD : FGHJ = EL^2 : EK^2.$$

§ 27. Rauminhalt der Pyramide.

A. Inhaltsgleichheit von Pyramiden.

Lehrsatz: Pyramiden sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. (Fig. 38.)

Voraussetzung: $ABC = EFGJ$, $DW = RZ$.

Behauptung: $D(ABC) = R(EFGJ)$.

Digitized by Google

Beweis: Man lege durch beide Pyramiden in gleichen Abständen von den Grundflächen und parallel zu ihnen die Querschnitte QST und $KLMP$, dann folgt aus den Proportionen

$$ABC : QST = DW^2 : DV^2$$

und

$$EFGJ : KLMP = RZ^2 : RX^2,$$

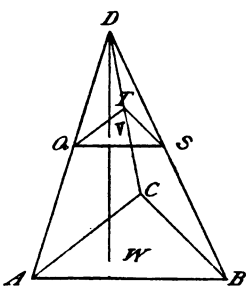
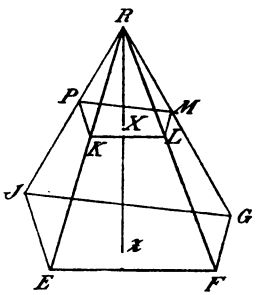


Fig. 38.

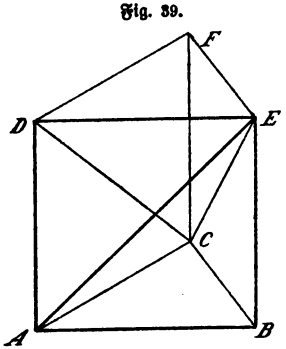


daß $QST = KLMP$ ist. Demnach sind die Bedingungen des Cavalierischen Grundsatzes erfüllt, und mithin die Pyramiden inhaltsgleich.

B. Beziehung zwischen Prisma und Pyramide.

Lehrsatz: Jedes dreiseitige Prisma läßt sich durch zwei Ebenen in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegen. (Fig. 39.)

Fig. 39.



Voraussetzung:
$ABCDEF$ dreiseitiges Prisma.
ACE und DCE Schnittflächen.

Behauptung:
$E(ABC) = C(DEF) = E(ACD)$.

Beweis: Die entstehenden drei Pyramiden sind inhaltsgleich, da sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

C. Inhaltsformel.

Die Inhaltsregel für die Pyramide ist:
$\frac{1}{3} \times$ Grundfläche $\times$ Höhe; in Formel: $V = \frac{1}{3} gh$.

Digitized by Google

Ableitung: 1. Die Pyramide sei dreiseitig. Diese kann als der dritte Teil eines auf derselben Grundfläche (g) errichteten Prisma von gleicher Höhe (h) angesehen werden. Da das Prisma den Inhalt gh hat, so hat die Pyramide den Inhalt $\frac{1}{3}gh$.

2. Die Pyramide sei mehrseitig; da sie sich in dreiseitige zerlegen läßt, so ist allgemein der Inhalt $= \frac{1}{3}gh$.

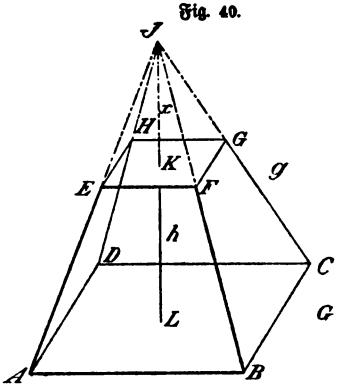
§ 28. Der Pyramidenstumpf.

Schneidet man von einer Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene ein Stück ab, so heißt der übrigbleibende Körper ein Pyramidenstumpf. Das abgeschnittene Stück heißt Ergänzungspyramide. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen ähnlichen Polygonen als Grundflächen und von soviel Trapezen als Seitenflächen begrenzt, als die Grundfläche Seiten hat. Höhe des Stumpfes ist der Abstand der beiden Grundflächen. Der Stumpf ist regelmäßig, wenn die Grundflächen regelmäßig und die Trapeze gleichschenklig sind.

Rauminhalt der abgestumpften Pyramide.

Der Rauminhalt eines Stumpfes läßt sich durch die beiden Grundflächen G, g und die Höhe h ausdrücken. (Fig. 40.)

Fig. 40.



Ableitung der Inhaltsformel. Man vervollständige den Pyramidenstumpf durch die Ergänzungspyramide zu einer Vollpyramide. Dann ist der geforderte Inhalt gleich der Differenz der Voll- und der Ergänzungspyramide. Hat diese die Höhe x, so ist der gesuchte Inhalt

Digitized by Google

1) $$V = \frac{1}{3}G(h+x) - \frac{1}{3}gx$$

oder

2) $$V = \frac{1}{3}Gh + \frac{1}{3}x(G-g).$$

Die Hilfsgröße x muß durch G, g und h ausgedrückt werden. Dazu dient die Proportion:

3) $$G : g = (h+x)^2 : x^2 \qquad \text{(vergl. § 26, 2).}$$

Aus dieser folgt durch Radizieren der Glieder:

4) $$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h+x) : x,$$

und hieraus durch korrespondierende Subtraktion:

5) $$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = h : x;$$

also

6) $$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \frac{h\sqrt{g}(\sqrt{G}+\sqrt{g})}{G-g}.$$

Setzt man diesen Wert für x in 2) ein, so verwandelt sich diese in

7) $$V = \frac{1}{3}Gh + \frac{1}{3}h\sqrt{g}(\sqrt{G}+\sqrt{g})$$

oder in

8) $$V = \frac{1}{3}h(G + \sqrt{Gg} + g).$$

§ 29. Der Cylinder.

Erklärung: Ein Cylinder ist ein Körper, der von zwei parallelen, kongruenten Kreisen als Grundflächen und von einer krummen Fläche, dem Mantel, als Seitenfläche begrenzt wird; der Mantel hat die Eigenschaft, daß jede gerade Verbindungslinie der Endpunkte paralleler Radien der Grundflächen ganz in ihn fällt.

Höhe eines Cylinders ist der Abstand der beiden Grundkreise.

Achse ist die Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte.

Ein gerader Cylinder ist ein solcher, dessen Achse auf den Grundflächen senkrecht steht.

Entstehung der Cylinderfläche durch Bewegung: Bewegt sich eine Gerade den Umfang eines Kreises entlang,

Digitized by Google

sodaß sie immer parallel zu sich bleibt, so beschreibt sie eine Cylinderfläche.

§ 30. Schnittflächen.

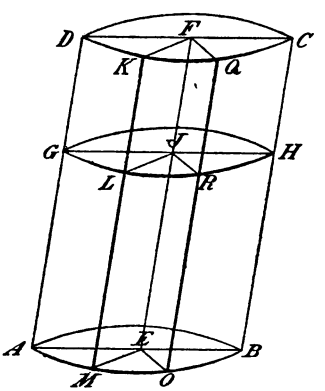
A. Achsenschnitt.

Jede durch die Achse eines Cylinders gelegte Ebene schneidet den Cylinder in einem Parallelogramme; dieses ist beim geraden Cylinder ein Rechteck. Ist die Schnittfigur ein Quadrat, so heißt der Cylinder gleichseitig.

B. Der Parallelschnitt.

Lehrsatz: Jede durch einen Cylinder parallel zur Grundfläche gelegte Ebene schneidet den Cylinder in einem Kreise; dieser ist der Grundfläche kongruent. (Fig. 41.)

Fig. 41.



Voraussetzung:

$ABCD$ ein Cylinder,
GH ein Parallelschnitt.

Behauptung:

GH ein Kreis, $\simeq AB$.

Beweis: Lege durch den Cylinder die Achsenschnitte $EFKM$ und $EFQO$, die den Parallelschnitt bezw. in JL und JR schneiden. Dann ist $JL \parallel EM$, $JR \parallel EO$ (§ 17). Daher auch $JL = EM$ und $JR = EO$, folglich $JL = JR$, da ja $EM = EO$ ist.

Also sind die Punkte L und R von J gleichweit entfernt. Das gilt aber von allen Punkten des Umfanges des Parallelschnittes; also ist dieser ein Kreis. Er ist dem Grundkreise kongruent.

Bemerkung: Dreht sich ein Rechteck um eine Seite als Achse, so beschreibt die gegenüberliegende Seite den Mantel eines geraden Cylinders.

C. Der schiefe Schnitt.

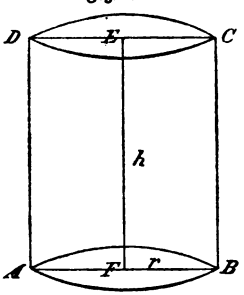
Jede durch einen Cylinder nicht parallel zur Grundfläche gelegte Ebene schneidet den Cylinder im allgemeinen in einer Durchschnittsfigur, welche Ellipse genannt wird.

Digitized by Google

§ 31. Rauminhalt und Mantel des Cylinders.

A. Rauminhalt: Ein Cylinder läßt sich als ein Prisma auffassen, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Polygon mit sehr vielen und sehr kleinen Seiten ist.

Fig. 42.



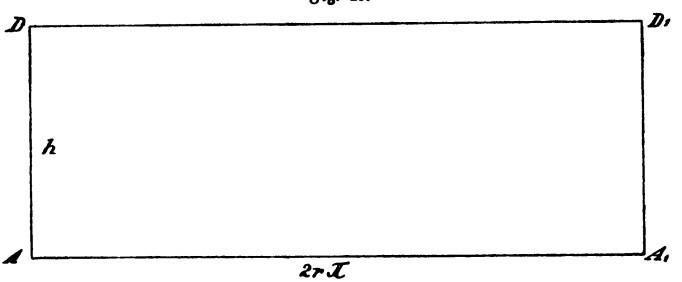
Der Inhalt eines Prisma ist aber gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe (gh); ist r der Radius des Grundkreises des Cylinders, so ist seine Grundfläche $g = r^2\pi$; demnach ist:

Cylinderinhalt $V = r^2\pi h$.

B. Mantel: Der Mantel eines Cylinders läßt sich abwickeln. Der Mantel eines geraden Cylinders nimmt dabei eine besonders einfache Gestalt an: er ist ein Rechteck, dessen Länge gleich dem Umfange des Grundkreises ($2r\pi$) und dessen Breite gleich der Cylinderhöhe (h) ist (Fig. 43). Es ist:

Mantel eines geraden Cylinders $M = 2r\pi h$.

Fig. 43.



§ 32. Der Kegel.

Denkt man sich den Mittelpunkt E des einen Grundkreises eines Cylinders mit sämtlichen Punkten des Umfanges des andern Grundkreises verbunden, so umhüllen die Verbindungslinien einen Kegel. (Fig. 44.)

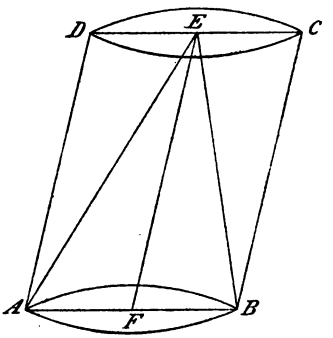
Erklärung: Ein Kegel ist ein Körper, der von einem Kreise als Grundfläche und von einer krummen Fläche, dem Mantel, als Seitenfläche begrenzt wird;

Digitized by Google

der Mantel hat die Eigenschaft, daß jede von der „Spitze" nach dem Kreisumfange gezogene gerade Linie ganz in ihn fällt. Diese Linie heißt Seitenlinie.

Höhe eines Kegels ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche. Achse ist die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte des Grundkreises verbindet.

Fig. 44.



Ein gerader Kegel ist ein solcher, dessen Achse auf der Grundfläche senkrecht steht. Seine Seitenlinien sind gleich lang.

Entstehung des Kegelmantels durch Bewegung:

Bewegt sich eine Gerade den Umfang eines Kreises entlang, sodaß sie immer durch einen festen Punkt geht, so beschreibt sie einen Kegelmantel.

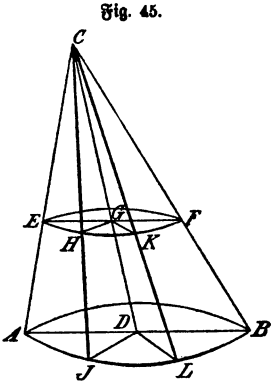
§ 33. Schnittflächen.

A. Der Achsenschnitt.

Jede durch die Achse eines Kegels gelegte Ebene schneidet den Kegel in einem Dreieck. Ist der Kegel ein gerader, so ist es gleichschenklig. Ist das Dreieck gleichseitig, so wird der Kegel auch gleichseitig genannt.

B. Der Parallelschnitt.

Fig. 45.



1. Lehrsatz: Jede durch einen Kegel parallel zur Grundfläche gelegte Ebene schneidet den Kegel in einem Kreise. (Fig. 45.)

Voraussetzung:

ABC ein Kegel,

Schnitt $EF \parallel$ Kreis AB.

Behauptung:

Schnitt EF ein Kreis.

Beweis: Zeichne die Achsenschnitte CDJ und CDL, die den Parallelschnitt bezw. in GH

Digitized by Google

und GK schneiden. Dann ist $GH \parallel DJ$, $GK \parallel DL$. Demnach finden die Proportionen statt:

$$GH : DJ = CG : CD,$$
$$GK : DL = CG : CD.$$

Da $DJ = DL$ ist, so ist auch $GH = GK$. Also sind die Punkte H und K von G gleichweit entfernt. Dasselbe gilt von allen Punkten des Umfanges des Parallelschnittes; also ist dieser ein Kreis.

2. Lehrsatz: In jedem Kegel verhalten sich Grundkreis und Parallelkreis zu einander wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze. Zum Beweise vergl. § 26, 2.

Bemerkung: Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten als Achse, so beschreibt die Hypotenuse den Mantel eines geraden Kegels.

C. Der schiefe Schnitt.

Jede durch einen Kegel nicht parallel zur Grundfläche gelegte Ebene schneidet den Kegel je nach der Lage in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel; und zwar:

1. Schneidet die Ebene alle Seitenlinien des Kegels, so entsteht eine Ellipse; sie ist eine allseitig geschlossene Figur.

2. Ist die Schnittebene einer Seitenlinie parallel, so entsteht eine Parabel; sie erstreckt sich mit zwei Armen ins Unendliche.

3. Ist die Schnittebene zwei Seitenlinien parallel, so entsteht eine Hyperbel. Die Ebene schneidet dann eine Anzahl von Seitenlinien direkt, zwei Seitenlinien nicht, die übrigen in der Verlängerung, in dem Scheitelkegel. Die Hyperbel besteht aus zwei getrennten Zweigen; der eine liegt in dem Mantel des Kegels, der andere in dem Mantel des Scheitelkegels. Jeder Zweig erstreckt sich mit zwei Armen ins Unendliche.

§ 34. Rauminhalt und Mantel des Kegels.

1. Rauminhalt: Einen Kegel kann man als eine Pyramide auffassen, deren Grundfläche ein Polygon mit sehr vielen Seiten ist. Diese Anschauung gestattet, die Pyra-

Digitized by Google

midenformel ohne weiteres auf den Kegel zu übertragen. Ist der Radius der Grundfläche r, so hat diese die Größe $g = r^2\pi$; folglich:

Rauminhalt des Kegels $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$.

2. Mantel: Der Mantel eines Kegels läßt sich abwickeln. Der Mantel eines geraden Kegels nimmt dabei eine besonders einfache Gestalt an: er wird ein Kreissektor, dessen Radius die Seitenlinie s des Kegels und dessen Bogen der Umfang des Grundkreises des Kegels $2r\pi$ ist. (Fig. 46, 47.) Nun ist der Inhalt eines Sektors gleich $\frac{1}{2}$ Bogen $\times$ Radius, d. h. hier gleich $\frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot s = r\pi s$; also:

Mantel eines geraden Kegels $M = r\pi s$.

Fig. 46.

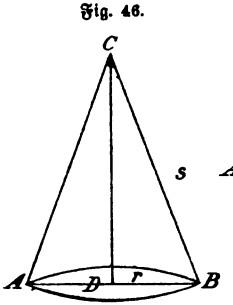
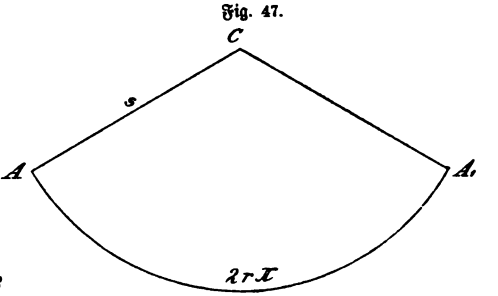


Fig. 47.



§ 35. Der Kegelstumpf.

Schneidet man von einem Kegel durch eine dem Grundkreise parallele Ebene ein Stück ab, so heißt der übrigbleibende Körper ein Kegelstumpf; das abgeschnittene Stück wird Ergänzungskegel genannt.

Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen, aber nicht gleichen Kreisen als Grundflächen und von einer krummen Fläche, dem Mantel, als Seitenfläche begrenzt; der Mantel hat die Eigenschaft, daß die gerade Verbindungslinie der Endpunkte paralleler Radien der Grundflächen ganz in ihn fällt. Diese Verbindungslinien sind die Seitenlinien des Kegelstumpfes. — Höhe. — Achse. — Gerader Kegelstumpf.

Digitized by Google

Rauminhalt des Kegelstumpfes.

Die Formel für den Pyramidenstumpf (§ 28) läßt sich auf den Kegelstumpf übertragen. Haben die Grundflächen des Kegelstumpfes bezw. die Radien r und ϱ, so ist $G = r^2\pi$, $g = \varrho^2\pi$, also

1) $$V = \frac{1}{3}h(r^2\pi + \sqrt{r^2\pi\varrho^2\pi} + \varrho^2\pi),$$

2) $$V = \frac{1}{3}h\pi(r^2 + r\varrho + \varrho^2).$$

Mantel des geraden Kegelstumpfes.

Der Mantel eines Kegelstumpfes läßt sich abwickeln. Beim geraden Kegelstumpf ist die Abwickelungsfläche wieder einfach zu berechnen, da sie ein Ausschnitt eines Kreisringes wird, ADD_1A_1 (Fig. 49). Dieser ist gleich dem Unterschied der Kreisausschnitte AA_1E und DD_1E.

Fig. 48.

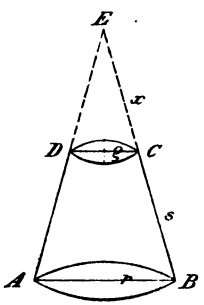
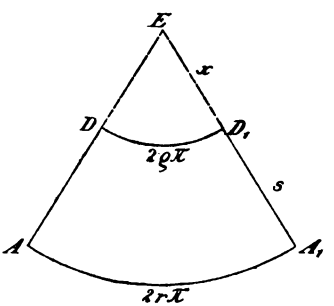


Fig. 49.



Nennt man die Seitenlinie des Ergänzungskegels vorübergehend x, so erhält man für den gesuchten Mantel M den Ausdruck:

3) $$M = \frac{2r\pi(s+x)}{2} - \frac{2\varrho\pi x}{2} = r\pi s + r\pi x - \varrho\pi x.$$

oder

4) $$M = r\pi s + (r-\varrho)\pi x.$$

Nun verhält sich (Fig. 48)

5) $$r : \varrho = (s+x) : x;$$

daraus folgt

6) $$(r-\varrho) : \varrho = s : x,$$

also

7) $$x = \frac{\varrho s}{r-\varrho}.$$

Digitized by Google

Demnach geht Gleichung 4), wenn man für x den in 7) berechneten Ausdruck setzt, über in

oder 8) $M = r\pi s + \varrho\pi s$

9) $M = (r + \varrho)\pi s.$

§ 36. Die Kugel.

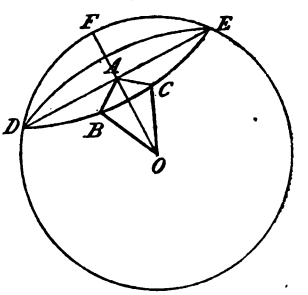
Erklärung: Die Kugel ist ein Körper, der von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, deren sämtliche Punkte von einem nicht ihr liegenden Punkte gleichen Abstand haben.

Dieser Abstand heißt Radius. — Durchmesser.

§ 37. Schnittkreise.

A. Lehrsatz: Jede durch eine Kugel gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise. (Fig. 50.)

Fig. 50.



Voraussetzung:

DE eine Schnittebene.

Behauptung:

Die Schnittebene ist ein Kreis.

Beweis: Fälle aus dem Mittelpunkte O der Kugel die Senkrechte OA auf die Schnittebene und zeige, daß alle Punkte der die Schnittfigur begrenzenden krummen Linie von A gleiche Entfernung haben. Ziehe zu dem Zwecke die Strahlen AB und AC beliebig in der Ebene bis zur Begrenzung. Dann ist

$$\Delta AOB \cong \Delta AOC,$$

da $AO = AO$, $OB = OC$, $\angle OAB = \angle OAC$ ist. Daraus folgt:

$$AB = AC.$$

Also sind die Punkte B und C gleichweit von A entfernt. Dasselbe gilt von allen Punkten der Begrenzung. Demnach ist die Schnittfigur ein Kreis; A ist sein Mittelpunkt.

B. Erklärungen: Eine durch den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem „größten" oder Hauptkreise. Hauptkreise am Globus sind der Äquator und die Meridiane.

Digitized by Google

Zwei Hauptkreise bilden auf der Kugeloberfläche ein Kugelzweieck, drei Hauptkreise ein Kugeldreieck. (Sphärisches Zwei- bezw. Dreieck.)

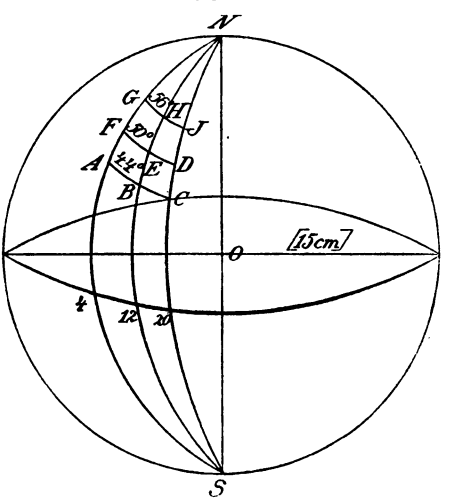
Jeder Hauptkreis teilt die Kugel in zwei Halbkugeln. Jeder andere Schnittkreis teilt die Kugel in zwei ungleiche Stücke, von denen insbesondere das kleinere ein Kugelabschnitt oder Segment genannt wird. Derjenige Teil der Kugeloberfläche, welcher das Segment begrenzt, heißt Kugelhaube oder Kalotte. Zu jedem Kugelabschnitt gehört ein Kugelausschnitt oder Sektor. Man erhält ihn, indem man zum Segment denjenigen Kegel legt, der den Schnittkreis als Grundfläche hat, und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt.

Zwei parallele Schnittkreise („Parallelkreise") begrenzen auf der Kugeloberfläche eine „Zone".

§ 38. Einiges über Kartographie.

Die Kugelfläche läßt sich nicht abwickeln. Die Gestalt eines Landes auf der Erdoberfläche kann man daher durch eine ebene Zeichnung nur näherungsweise richtig darstellen. Handelt es sich um die Darstellung eines kleinen Teiles der Erdoberfläche, z. B. von Deutschland, durch eine ebene Zeichnung, so kann man durch folgendes Verfahren eine möglichst genaue Karte entwerfen.

Fig. 51.



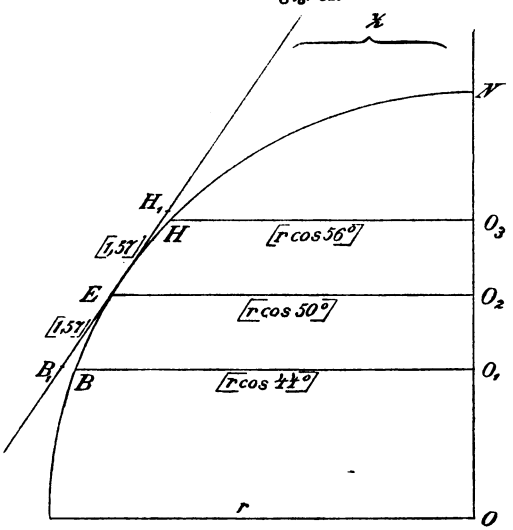
Der Radius der Kugel sei 15 cm*. Das Zonenstück $ACJG$ (Deutschland, Fig. 51) sei durch eine ebene

* Die Länge des Radius 15 cm ist nur der Fig. 53 zu Grunde gelegt.

Digitized by Google

Zeichnung darzustellen. Es sei von den Parallelkreisen 44° und 56° und von den Meridianen 4° und 20° begrenzt, sodaß der mittlere Meridian (12°) den mittleren Parallelkreis (50°) in E (Fichtelgebirge) durchschneidet. Durch die Punkte des Bogens DF denke man sich Tangenten an die durch die betreffenden Punkte gehenden Meridiane gelegt (Fig. 52).

Fig. 52.

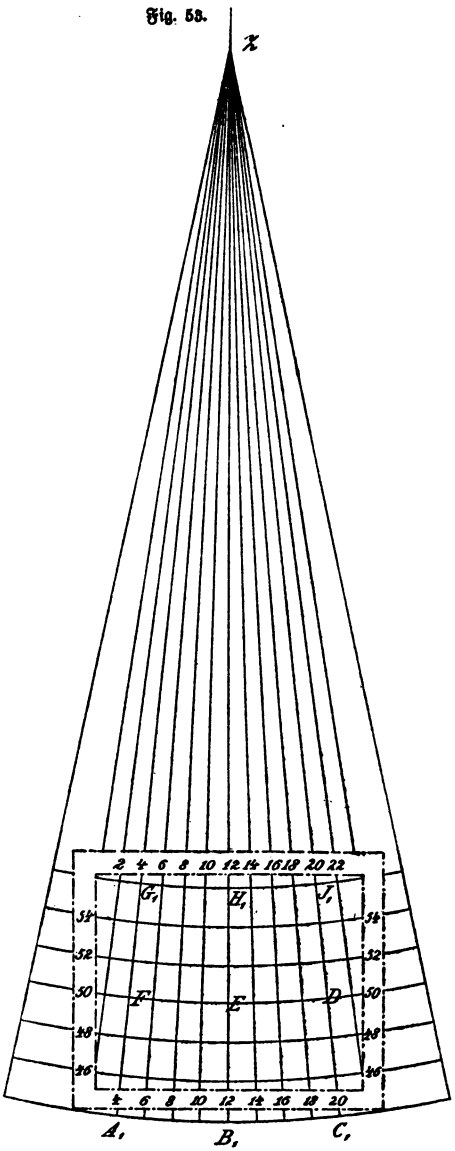


Diese Tangenten bilden den Mantel eines die Kugel umgebenden geraden Kegels, dessen Spitze auf der verlängerten Erdaxe in Z liegt. EZ ist $= r\,ctg\,50° = 12{,}6$ cm. Die Bogen EB und EH umfassen je 6°, also ist ihre Länge $= \frac{6r\pi}{180} = 1{,}57$ cm. Diese Länge trage man auf der Tangente von E aus nach beiden Seiten bis B_1 bezw. H_1 ab. Dadurch werden die Meridianbogen (BH) zu geraden Linien (B_1H_1) ausgereckt. Auf diese Weise wird die Kugelzone $ACJG$ durch eine Kegelzone $A_1C_1J_1G_1$ ersetzt. Beide Zonen hängen in dem Bogen DF zusammen. Denkt man sich nun den Kegelmantel abgewickelt, so geht die Kegelzone in den Ausschnitt eines Kreisringes $A_1C_1J_1G_1$ über. Radien desselben sind die Seiten-

Digitized by Google

linien des Kegels, also die ausgereckten Meridiane; die Parallelkreise der Kugel werden Bogen konzentrischer Kreise des Ringstückes.

Fig. 53.



Zur Anfertigung der Karte zeichne man nun (Fig. 53) den mittleren ausgereckten Meridian von 12°, $ZB_1 =$ 14,17 cm, die Parallelkreise A_1C_1 (Radius 14,17 cm), FD (Radius 12,6 cm) und G_1J_1 (Radius 11 cm). Sollen die Meridiane von 2 zu 2 Grad fortschreiten, so berechne man die Länge des Bogens von 2 Grad auf dem Parallelkreise 50°; man findet, da der Radius dieses Kreises $r \cos 50°$ ist,

$$\frac{r \cos 50° \cdot \pi \cdot 2}{180°} = 0{,}34 \text{ cm}.$$

Man trage nun diese Größe rechts und links von E auf dem Parallel 50° wiederholt ab; dadurch erhält man die Durchschnittspunkte der Meridiane von 2 zu 2 Grad.

Für eine Karte von der Größe Europas dürfen die Meridiane nicht mehr als gerade

Digitized by Google

Linien gezeichnet werden, weil sie, von Z herkommend, im Süden zu weit auseinandergehen würden. Man berechnet dann die Größe ihrer Abstände von dem mittleren Meridiane auf jedem Parallelkreise, verbindet die entsprechenden Punkte und erhält nun gekrümmte Linien als Vertreter der Meridiane.

§ 39. Rauminhalt der Kugel.

A. Inhaltsgleichheit der Halbkugel und eines „Restkörpers".

Lehrsatz: Eine Halbkugel, deren Grundfläche ein Hauptkreis und deren Höhe ein Kugelradius ist, ist inhaltsgleich einem Cylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe vermindert um einen Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. (Fig. 54 u. 55.)

Fig. 54.

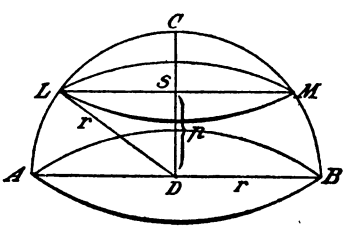
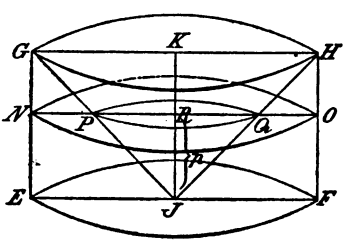


Fig. 55.



Voraussetzung: Kreis AB = Kreis EF; $DC = JK$.

Behauptung: $ABC = EFHG - GHJ$.

Beweis: Der Körper, der entsteht, wenn der Cylinder $EFHG$ um den Kegel GHJ vermindert wird, der „Restkörper", hat mit der Halbkugel ABC gleiche Grundfläche und gleiche Höhe. Es läßt sich nun zeigen, daß die durch die beiden Körper parallel zu den Grundflächen in gleichen Abständen von diesen gelegten Durchschnittsfiguren inhaltsgleich sind. Die Halbkugel werde parallel zur Grundfläche im Abstande p in dem Kreise LM durchschnitten, der Restkörper parallel zur Grundfläche in demselben Abstande p in dem Kreisringe $NPQO$. Nun läßt sich der Inhalt jeder der beiden Durchschnittsfiguren durch dieselben Größen r (Kugelradius) und p ausdrücken:

I. Kreis $LM = LS^2 . \pi = (LD^2 - DS^2) . \pi = (r^2 - p^2) . \pi$.

II. Kreisring $NPQO = NR^2 . \pi - PR^2 . \pi = (NR^2 - PR^2)\pi$.

Digitized by Google

Es ist nun $NR = r$. Ferner ist $PR = RJ = p$; denn $\Delta GJK \sim \Delta PJR$, da aber das eine Dreieck, GJK, gleichschenklig ist, so ist auch das andere, PJR, gleichschenklig, also $PR = RJ = p$. Demnach

$$\text{Kreisring} = (r^2 - p^2)\pi.$$

Also sind die beiden Durchschnittsfiguren inhaltsgleich. Folglich sind die Halbkugel und der Restkörper nach dem Cavalierischen Grundsatze (§ 22) inhaltsgleich.

B. **Entwicklung der Inhaltsformel.**

$$\text{Halbkugel} = \text{Cylinder minus Kegel},$$

also

$$\text{Halbkugel} = r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi.$$

Folglich ist der

$$\text{Kugelinhalt } V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

§ 40. Oberfläche der Kugel.

Man denke sich die Oberfläche der Kugel in eine sehr große Anzahl kleiner Flächenstückchen, f_1, f_2 u. s. w. zerlegt, etwa durch dicht aneinander gedrängte Breiten- und Längenkreise. Denkt man sich die Begrenzung zunächst von f_1 mit dem Kugelmittelpunkte verbunden, so entsteht eine dünne Pyramide, deren Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, und deren Grundfläche f_1 wegen ihrer Kleinheit als eben angesehen werden kann. Der Inhalt der Pyramide ist daher gleich $\frac{1}{3}f_1 r$, da ihre Höhe gleich dem Kugelradius r ist. Auf diese Weise kann man sich die Kugel in eine sehr große Anzahl von Pyramiden zerlegt denken, deren Summe gleich dem Rauminhalte der Kugel ist. Es ist daher

$$\frac{1}{3}f_1 r + \frac{1}{3}f_2 r + \frac{1}{3}f_3 r + \cdots = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\frac{1}{3}r$, so erhält man:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = 4r^2\pi.$$

Digitized by Google

Die Summe auf der linken Seite ist aber die Oberfläche der Kugel. Daher wird

$$\text{Oberfläche } O = 4r^2\pi.$$

§ 41. Kugelabschnitt und Ausschnitt. Haube und Zone.

A. Rauminhalt des Kugelabschnitts.

Der durch die Ebene LM in Fig. 54 entstehende Abschnitt LMC habe die Höhe $SC = h$; er ist nach § 39 inhaltsgleich dem entsprechenden Teile des Restkörpers von gleicher Höhe, $GNPQOH$; also ist

1) Kugelabschnitt LMC = Cylinder $GNOH$ minus Kegelstumpf $GPQH$. Der Radius der Grundfläche des Cylinders ist $RO = r$; die Radien der Grundflächen des Kegelstumpfes sind bezw. $KH = r$ und $RQ = RJ = r - h$; daher erhält man:

2) Abschnitt $LMC = r^2\pi h - \frac{1}{3}h\pi[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]$.

Die rechte Seite läßt sich aber vereinfachen:

3) Abschnitt $LMC = r^2\pi h - \frac{1}{3}h\pi(3r^2 - 3rh + h^2)$,

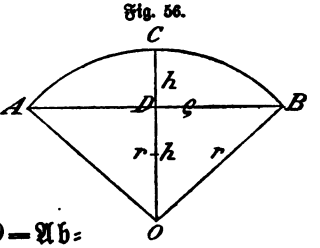
4) $\quad = \frac{1}{3}h\pi(3r^2 - 3r^2 + 3rh - h^2)$.

Folglich:

5) Kugelabschnitt

$$S = \frac{1}{3}h^2\pi(3r - h).$$

Fig. 56.



B. Rauminhalt des Kugelausschnittes.

6) Fig. 56: Ausschnitt $ACBO$ = Abschnitt ABC plus Kegel ABO; folglich:

7) Ausschnitt $= \frac{1}{3}h^2\pi(3r - h) + \frac{1}{3}\varrho^2\pi(r - h)$.

Nun ist:

8) $\quad \varrho^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2 = h(2r - h)$.

Setzt man diesen Ausdruck für ϱ^2 in 7) ein, so geht diese über in

Digitized by Google

9) Ausschnitt $= \frac{1}{3}h^2\pi(3r-h) + \frac{1}{3}h\pi(r-h)(2r-h)$,

10) $= \frac{1}{3}h\pi(3rh - h^2 + 2r^2 - 2rh - rh + h^2)$,

11) $= \frac{1}{3}h\pi \cdot 2r^2$.

Folglich:

12) Kugelausschnitt $S = \frac{2}{3}r^2\pi h$.

C. Haube.

Man denke sich die Haube in unendlich kleine Flächenstückchen f_1, f_2 u. s. w. zerlegt, betrachte sie wieder als Grundflächen von Pyramiden, deren gemeinsame Spitze der Kugelmittelpunkt ist, und drücke den Rauminhalt des Kugelausschnittes auf zwei Weisen aus:

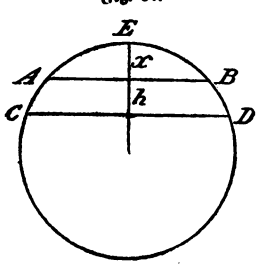
13) $\frac{1}{3}f_1 r + \frac{1}{3}f_2 r + \cdots = \frac{2}{3}r^2\pi h$;

14) $f_1 + f_2 + \cdots = 2r\pi h$,

d. h.

15) Haube $\underline{K = 2r\pi h}$.

Fig. 57.



D. Zone.

Der Abstand der beiden Parallelkreise in Fig. 57 sei h. Dann ist

16) Zone $ABDC$ = Haube CED − Haube AEB,

17) Zone $= 2r\pi(h+x) - 2r\pi x$,

18) Zone $\underline{Z = 2r\pi h}$.

§ 42. Geschichtliches.

Den ältesten uns bekannten Gegenstand stereometrischer Betrachtungen scheinen die großen Pyramiden der Ägypter gebildet zu haben. Jedenfalls darf den Pyramidenerbauern, den Königen Chufu, Chafra, Menkera (zwischen 3600 und 3000)

Digitized by Google

oder vielmehr ihren Baumeistern ein nicht geringes Maß mathematischer Kenntnisse zugeschrieben werden. Dafür spricht die Thatsache, daß die großen Pyramiden scharf nach den Himmelsrichtungen orientiert sind, daß ferner der Neigungswinkel der Seitenwand und der Grundfläche wenig oder gar nicht von 52° abweicht, daß sie also so zu sagen einander ähnlich sind. Schriftliche Aufzeichnungen hierüber aus der Zeit der Erbauung haben sich nicht auffinden lassen; indessen finden sich in dem ältesten mathematischen Übungsbuche, das wir überhaupt kennen, dem des Ahmes, einige das Ähnlichmachen von Pyramiden behandelnde Aufgaben. Die Entstehungszeit dieses Übungsbuches (Papyrus Rhind im British Museum) wird in den Zeitraum von 2000—1700 gesetzt, doch geht aus einer Bemerkung des Verfassers, des „Schreibers" Ahmes, hervor, daß er nach dem Vorbilde von alten unter dem Könige Raënmat entstandenen Schriften arbeitete, dessen Regierungszeit die Ägyptologie in die Zeit von 2400—2200 setzt. Weniger Interesse beanspruchen die Aufgaben des Ahmes, in denen Inhaltsberechnungen von Fruchthäusern vorgenommen werden, vor allem, weil die Gestalt der Gebäude aus den Aufgaben und ihren Auflösungen nicht klar hervorgeht. Mehr ist uns über die stereometrischen Kenntnisse der alten Ägypter nicht bekannt. Weitere Entwicklung aber erfuhr die Stereometrie durch das Volk, dessen Gelehrte um die Wette nach Ägypten reisten, um sich von den Priestern in den Wissenschaften unterrichten zu lassen, durch die Griechen. Pythagoras von Samos (ungefähr 580—500 v. Chr.), der sich einige Zeit in Ägypten aufhielt und dann in Großgriechenland die Pythagoräische Schule stiftete, kannte die fünf regelmäßigen oder „kosmischen" Körper: Das erfahren wir aus einem Dialoge Platons (429—348; Athen), der selbst seine Ausbildung Pythagoräischen Lehrern verdankte und der das mathematische Wissen der damaligen Zeit völlig beherrschte. Nach ihm heißen jene Körper auch Platonische. Von dem Pythagoräer Archytas aus Tarent (um 400) wird uns überliefert, daß er klare Anschauungen über Cylinder und Kegel besaß. Einer seiner Schüler, Eudoxus von Knidos (408—

Digitized by Google

355), der auch einige Zeit in Ägypten gelebt hat, kannte die Beziehung zwischen Prisma und Pyramide. Endlich vereinigte Euklides von Alexandria (um 300 v. Chr.) auch auf diesem Gebiete der Mathematik seine eigenen Entdeckungen mit den schon vor ihm bekannten zu einem Lehrgebäude der Stereometrie, das den Inhalt des 11., 12. und 13. Buches seiner berühmten „Elemente" bildet. Die Stoffverteilung ist folgende: Das 11. Buch handelt von der Lage der Geraden und der Ebenen; das 12. von dem Maße des körperlichen Inhalts des Prisma, der Pyramide, des Cylinders, des Kegels, der Kugel; das 13. endlich nmfaßt die Lehre von den fünf regelmäßigen Körpern.

Euklides gibt indes nicht an, wie man den Inhalt der Körper berechnen kann. Bei der Kugel z. B. heißt es nur, daß ihre Rauminhalte sich wie die Kuben der Radien verhalten. Die Aufstellung von Inhaltsformeln ist das Verdienst des Archimedes, der von 287 bis 212 v. Chr. in Syrakus lebte. Von seinen mathematischen Leistungen ist die Berechnung der Kreiskonstanten $\pi = 3\frac{1}{7}$ die bekannteste. Er selbst stellte von seinen Entdeckungen diejenigen am höchsten, die von der Kugel und dem Cylinder handeln, nämlich: 1. Die Oberfläche einer Kugel ist dem Vierfachen ihres größten Kreises gleich. 2. Die Oberfläche eines Kugelabschnittes ist so groß als ein Kreis, dessen Halbmesser einer geraden Linie vom Scheitel des Abschnittes bis an den Umfang des Grundkreises gleich ist. 3. Der Cylinder, welcher zur Grundfläche einen Hauptkreis der Kugel hat, zur Höhe aber den Durchmesser der Kugel, d. h. der der Kugel umbeschriebene Cylinder ist $\frac{3}{2}$ mal so groß als die Kugel. — Gerade auf diese Sätze war Archimedes besonders stolz: auf seinen Wunsch wurde die Kugel mit dem sie umgebenden Cylinder auf seinen Grabstein gemeißelt; an dieser Figur erkannte Cicero im Jahre 75 v. Chr. die Begräbnisstätte des Archimedes wieder. Dieselbe Figur erhielt sich, offenbar zum Gedächtnis des Archimedes, auf Münzen der Stadt Syrakus.

Digitized by Google

Zweiter Teil.

Aufgaben.

§ 43. Das Prisma.

1. Es soll ein Würfel durch Symmetrieebenen halbiert werden; die Symmetrieebene ist zu legen a) so, daß sie einer Seitenfläche parallel ist; b) durch zwei gegenüberliegende Kanten (BC, EH; BF, DH; Fig. 2). Wie zeichnet man in beiden Fällen das Netz der entstehenden Würfelhälfte?
2. Die Kante eines Würfels sei $a = 9$; 0,4; 8,2 cm. Wie groß sind Rauminhalt und Gesamtoberfläche? Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche eines Würfels mit der doppelten Kante?
3. Der Rauminhalt eines Würfels sei $J = 512$; 0,343; 3,16 ccm. Berechne die Kante und die Oberfläche.
4. Die Gesamtoberfläche eines Würfels sei $O = 384$; 0,96; 48; 120 qcm. Wie groß ist der Rauminhalt?
5. Das Netz eines Würfels sei $n = 72$. Wie groß ist sein Rauminhalt?
6. Die Kante eines Würfels sei $a = 1{,}7$ m. Wie groß ist die Diagonalebene $BCHE$ (Fig. 2) und wie lang die Raumdiagonale $BH = f$?
7. Berechne aus der Diagonalebene $e = 33$ die Würfelkante. Ferner aus der Raumdiagonale $f = 12$ den Rauminhalt.
8. Welches Gewicht hat ein Marmorwürfel, wenn seine Kante $a = 3$ cm; 8 cm; 0,3 m lang ist? (Specifisches Gewicht des Marmors 2,7.)

Digitized by Google

9. Wieviel wiegt ein aus reinem Golde bestehender Würfel, dessen Kante 10 cm lang? (Specifisches Gewicht des Goldes 19,25.) Welchen Wert hat der Würfel, wenn 1 kg Gold 2780 Mark kostet?

9a. Wie groß muß ein goldener Würfel sein, damit er einen Wert von 1 Million Mark habe?

10. Vergrößert man die Kante eines Würfels um 2, so wächst seine Oberfläche um 96. Wie groß ist die Kante?

11. Verdoppelt man die Kante eines Würfels, so wächst sein Inhalt um 448. Wie groß ist die Kante?

12. Um wieviel muß man die Kante $a = 6$ eines Würfels vergrößern, damit der Inhalt um 296 wächst?

13. Um wieviel muß man die Würfelkante $a = 11$ vermehren, damit die Oberfläche um 288 wächst?

14. Vergrößert man die Kante eines Würfels um 2, so wächst der Inhalt um 386. Wie groß ist die Kante? (Quadratische Gleichung.)

---

15. Eine quadratische Säule wird durch eine durch zwei Grundkanten gelegte Diagonalebene halbiert. Zeichne das Netz der entstehenden Säulenhälfte.

16. Eine quadratische Säule werde durch eine Symmetrieebene halbiert. Zeichne das Netz des entstehenden halben Körpers, wenn die Symmetrieebene a) parallel zu einer Seitenfläche, b) parallel zu einer Grundfläche gelegt wird.

17. Die Grundkante einer quadratischen Säule sei $a = 7$; 13; 0,5 cm, die Seitenkante b beziehungsweise gleich 9; 20; 0,75 cm. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche?

18. Berechne aus der Grundkante $a = 0{,}49$ und der dreimal so langen Höhe einer quadratischen Säule den Rauminhalt und die Oberfläche.

19. Berechne an einer quadratischen Säule:

1) aus der Grundkante $a = 5$ und dem Rauminhalte $V = 300$ die Höhe;

Digitized by Google

2) aus der Seitenkante $h = 8$ und dem Rauminhalte $V = 512$ die Grundkante;

3) aus der Grundkante $a = 4$ und der Oberfläche $O = 400$ die Seitenkante und den Rauminhalt.

20. Wie berechnet man aus der Grundkante einer quadratischen Säule $a = 7$ den Rauminhalt, wenn die Seitenfläche $1\frac{1}{2}$ mal so groß ist als die Grundfläche?

21. Der Rauminhalt einer quadratischen Säule sei $V = 2000$, die Grundkante $a = 10$. Wie groß ist die durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegte Ebene e?

22. Die durch eine quadratische Säule gelegte Diagonalebene sei $f = 72$ qcm, die Grundkante $a = 4$ cm. Wie groß ist der Rauminhalt?

23. Die durch zwei Seitenkanten einer quadratischen Säule gelegte Diagonalebene sei $f = 75$ qcm, der Rauminhalt $V = 300$ ccm. Wie groß ist die Grundkante?

24. Die Grundkante einer quadratischen Säule sei $a = 3$, die Seitenkante $b = 8$. Um wieviel muß man die Seitenkante vermehren, damit der Inhalt um 18 wächst?

---

25. Die drei in einem Punkte zusammenstoßenden Kanten einer rechteckigen Säule seien bezw. 5, 7, 9 cm. 1) Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche? 2) Wieviel kg wiegt sie, wenn sie aus Eisen (spec. Gew. 7) besteht?

26. Die Grundkanten einer rechteckigen Säule seien $a = 3$ und $b = 4$, die Seitenkante $c = 5$. Wie groß ist die Raumdiagonale?

---

27. Zeichne das Netz a) eines dreiseitigen; b) eines fünfseitigen; c) eines sechsseitigen regelmäßigen Prisma, wenn die Seitenkante jedesmal $2\frac{1}{2}$ mal so lang ist als die Grundkante.

28. Berechne bei einem dreiseitigen regelmäßigen Prisma

a) aus der Grundkante $a = 9$ und der Höhe $h = 12$ den Rauminhalt V und die Oberfläche O.

Digitized by Google

b) aus dem Rauminhalte $V = 300$ und der Höhe $h = 6$ die Grundkante.

29. Den Rauminhalt eines regelmäßigen sechsseitigen Prisma zu berechnen
   a) aus der Grundkante $a = 5$ und der Höhe $h = 3$;
   b) aus dem großen Radius der Grundfläche $r = 4$ und der Höhe $h = 6$;
   c) aus dem kleinen Radius der Grundfläche $\varrho = 3$ und der Höhe $h = 6$.

30. Die Seitenfläche eines regelmäßigen sechsseitigen Prisma sei $1\frac{1}{2}$ mal so groß als die Grundfläche. Wie groß ist der Rauminhalt, wenn die Höhe $h = 12$ ist?

31. Aus dem Rauminhalte 200 und der Höhe 5 eines regelmäßigen sechsseitigen Prisma die Radien der Grundfläche zu berechnen.

32. Bei einem regelmäßigen achtseitigen Prisma soll a) aus der Grundkante $a = 8$ und der Höhe $h = 24$ der Inhalt V; b) aus dem Inhalte $V = 80$ und der Höhe $h = 8$ die Grundkante a berechnet werden.

33. Der Rauminhalt eines regelmäßigen zehnseitigen Prisma, dessen quadratische Seitenflächen den Inhalt $F = 2$ haben, soll berechnet werden.

34. Wie groß ist das Gewicht einer regelmäßigen zehnseitigen Säule aus Granit, deren Höhe $h = 8$ und deren Durchmesser $d = 1$ m lang ist? (Spec. Gew. des Granits 2,7.)

---

35. Die Seitenkante $s = 101$ eines dreiseitigen Prisma sei gegen die Grundfläche um $\alpha = 67^\circ 15'$ geneigt. Wie groß ist sein Rauminhalt, wenn die Grundfläche die Winkel $u = 22^\circ 37' 12''$, $v = 71^\circ 4' 31''$ hat und einem Kreise vom Radius $r = 48{,}1$ einbeschrieben ist?

Digitized by Google

§ 44. Die Pyramide.

1. Eine gerade Pyramide möge eine quadratische Basis haben.
   a) Zeichne das Netz der Pyramide, wenn die Seitenkante $1\frac{1}{2}$ mal so lang ist als die Grundkante.
   b) Durch die Pyramide werde eine Symmetrieebene so gelegt, daß sie zwei Seitenflächen halbiert: zeichne das Netz der entstehenden halben Pyramide.
   c) Durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten werde eine Symmetrieebene gelegt; wie zeichnet man das Netz der nun entstehenden Pyramidenhälfte?
   d) Führe die im Vorhergehenden verlangten Netzzeichnungen auch für den Fall aus, daß die Seitendreiecke gleichseitig sind.
2. Zeichne das Netz einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, wenn Grund- und Seitenkante in dem Verhältnis 2 : 3 stehen.
3. Zeichne das Netz
   a) eines regelmäßigen Tetraeders;
   b) einer durch eine Symmetrieebene entstehenden Tetraederhälfte.
4. Zeichne das Netz einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide, deren Grund- und Seitenkante in dem Verhältnisse 3 : 5 stehen.
5. Die Grundfläche einer geraden Pyramide sei ein Rechteck, dessen Länge und Breite gleich dem größeren bezw. kleineren Abschnitte der stetig geteilten Seitenkante s ist. Wie zeichnet man das Netz der Pyramide?
6. Berechne bei einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide
   a) aus der Grundkante $a = 11$ und der Höhe $h = 24$ die Größe der beiden Symmetrieebenen und den Rauminhalt;
   b) aus dem Rauminhalte $V = 144$ und der Grundkante $a = 6$ die Höhe;
   c) aus dem Rauminhalte $V = 60{,}8$ und der Höhe $h = 8$ die Grundkante a.

Digitized by Google

7. Die Grundfläche einer geraden Pyramide sei ein Rechteck mit den Seiten $a = 0{,}7$ und $b = 0{,}4$, die Höhe sei $h = 1{,}2$. Berechne den Rauminhalt der Pyramide.

8. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rhombus mit den Diagonalen $e = 10$, $f = 14$; die Höhe der Pyramide sei $h = 21$. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

9. Wie groß ist der Rauminhalt einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, wenn die Grundkante $a = 3$, die Höhe $h = 11$ ist?

10. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b; die Höhe sei gleich h. Wie groß ist der Rauminhalt?

    1) $a = 6$; $b = 4$; $h = 9$.
    2) $a = 3{,}2$; $b = 2{,}6$; $h = 4$.

11. Die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe h ist, sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c. Wie groß ist der Rauminhalt?

    1) $a = 15$; $b = 41$; $c = 52$; $h = 60$.
    2) $a = 69$; $b = 52$; $c = 25$; $h = 30$.

12. Die Höhe einer dreiseitigen Pyramide sei h, zwei Seiten der Grundfläche a und b schließen den Winkel γ ein. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

    1) $h = 36$; $a = 25$; $b = 17$; $\gamma = 81^\circ\,12'\,9''$.
    2) $h = 120$; $a = 52$; $b = 29$; $\gamma = 113^\circ\,46'\,38''$.

13. Die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe h ist, ist ein Dreieck mit den Winkeln u und v. Wenn nun der Radius des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises die Länge r hat, wie groß ist der Inhalt der Pyramide? ($h = 30$; $u = 22^\circ\,37'\,12''$; $v = 61^\circ\,55'\,39''$; $r = 22{,}1$.)

14. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, deren Länge a ist, schließen einen Winkel ε ein. Senkrecht zur Ebene des Dreiecks werde aus dem Scheitelpunkt des Winkels ε eine Gerade von der dreifachen Schenkellänge errichtet. Wird alsdann der Endpunkt der Geraden mit den Endpunkten der Basis des Dreiecks verbunden, so entsteht eine Pyramide, deren Inhalt berechnet werden soll. ($a = 53$; $\angle\varepsilon = 63^\circ\,43'\,54''$.)

Digitized by Google

15. Wie groß ist der Rauminhalt einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide, wenn die Grundkante $a = 9$ und die Höhe $h = 15$ ist?

16. Eine Pyramide mit quadratischer Basis, deren Seitenflächen kongruente Dreiecke sind, habe die Grundkante $a = 6$. Wie groß ist ihr Rauminhalt, wenn ihre Höhe gleich dem größeren Abschnitte der stetig geteilten Grundkante ist?

17. Die größte ägyptische Pyramide, die des Chufu (Cheops), hatte vor der Versandung eine Höhe von 147 m, während die Länge der quadratischen Grundfläche 233 m betrug. Welche Neigung haben a) die Seitenflächen, b) die Seitenkanten gegen die Grundfläche? c) Welchen Winkel bilden zwei benachbarte, d) welchen zwei gegenüberliegende Seitenkanten mit einander? e) Wieviel qkm machen die vier Seitendreiecke zusammen aus?

18. Die Pyramide des Chafra hat eine Grundkante von $a = 215$ m, eine Höhe von $h = 138$ m. Berechne den Inhalt der vier Seitendreiecke. Fertige dann ein Modell der Pyramide an unter Benutzung der Thatsache, daß sich die Grundkante zur Seitenkante näherungsweise wie 21 : 20 verhält.

19. Grund- und Seitenkanten einer vierseitigen Pyramide seien von gleicher Länge $a = 5$. Wie groß ist ihr Rauminhalt? Wie groß sind die vier Seitendreiecke zusammen?

20. Grund- und Seitenkanten einer vierseitigen Pyramide seien von gleicher Länge. Wie lang sind sie, wenn der Rauminhalt der Pyramide $J = 70{,}1$ ccm ist.

Welcher regelmäßige Körper entsteht, wenn zwei derartige Pyramiden von gleicher Größe mit ihren Grundflächen aneinandergesetzt werden?

21. Den Rauminhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide aus der Grundkante $a = 20$ und der Seitenkante $b = 24$ zu berechnen.

Digitized by Google

22. Die Höhe einer fünfseitigen regelmäßigen Pyramide sei $h = 20$, die Seitenkante $s = 29$. Wie groß ist die Neigung der Seitenkante gegen die Grundfläche? Wie groß sind die beiden Radien der Grundfläche?

23. Ein regelmäßiges Tetraeder habe eine Kante von $a = 4$ m Länge. Wie groß ist a) seine Oberfläche; b) sein Rauminhalt?

24. Die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide, deren Grund- und Seitenkanten gleich lang sind, sei $O = 300$ qcm. Wie lang sind die Kanten?

---

25. Das Netz eines vierseitigen, regelmäßigen Pyramidenstumpfes zu zeichnen, wenn die obere Grundkante, die untere Grundkante und die Seitenkante in dem Verhältnis 3 : 4 : 5 stehen.

26. a) Durch zwei Seitenflächen eines vierseitigen, regelmäßigen Pyramidenstumpfes werde eine Symmetrieebene gelegt. Zeichne das Netz der entstehenden Körperhälfte, wenn die Kanten der beiden Grundflächen sich wie 1 : 2 verhalten und die Seitenkante die mittlere geometrische Proportionale zu ihnen ist.

b) Führe dieselbe Aufgabe für die durch zwei Seitenkanten gelegte Symmetrieebene aus.

27. Die Kanten der beiden Grundflächen einer regelmäßigen vierseitigen abgestumpften Pyramide seien bezw. $a = 77$, $b = 55$, die Höhe sei $h = 60$. Berechne

a) die durch zwei Seitenflächen gelegte Symmetrieebene S;

b) die durch zwei Seitenkanten gelegte Symmetrieebene S_1;

c) die Seitenfläche T;

d) den Neigungswinkel α der Seitenkanten und den Neigungswinkel β der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

28. Den Rauminhalt eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes a) aus den beiden Grundkanten $a = 10$, $b = 7$ und der Höhe $c = 8$;

Digitized by Google

b) aus den Grundkanten $a = 9$, $b = 5$ und der Seitenkante $c = 10$

zu berechnen.

29. Die durch zwei Seitenflächen gelegte Symmetrieebene eines quadratischen geraden Pyramidenstumpfes sei ein Viereck, dem sich ein Kreis einbeschreiben läßt. Wie groß ist der Rauminhalt des Körpers, wenn die beiden Grundkanten $a = 16$ und $b = 9$ cm lang sind?

30. Die durch zwei Seitenkanten gelegte Symmetrieebene eines geraden regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes sei ein Tangentenviereck. Wie groß ist der Rauminhalt des Körpers, wenn die Grundkanten 9 bezw. 4 cm lang sind?

31. Die Grundkanten eines Pyramidenstumpfes, dessen vier Seitenflächen kongruente gleichschenklige Trapeze sind, seien $a = 8$ und $b = 2$, der Inhalt der zwei Seitenflächen halbierenden Symmetrieebene sei $F = 30$. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

32. Der Rauminhalt eines regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpfes soll aus den Grundkanten $a = 4$, $b = 25$ und der Höhe $h = 6$ berechnet werden.

§ 45. Der Cylinder.

1. Den Rauminhalt V und den Mantel M eines geraden Cylinders zu berechnen, wenn der Radius r des Grundkreises und die Höhe h gegeben ist. a) $r = 0{,}5$; $h = 1{,}2$. b) $r = 1{,}5$; $h = 4$.

2. Die Höhe eines Cylinders zu berechnen, wenn der Rauminhalt $V = 480$ ccm und der Radius des Grundkreises $r = 7{,}1$ cm ist.

3. Den Radius des Grundkreises eines Cylinders zu berechnen, wenn der Rauminhalt $V = 25$ und die Höhe $h = 4$ ist.

4. Ein Rechteck mit den Seiten $a = 14$ und $b = 8$ drehe sich um seine längere Symmetrieachse. Wie groß sind Rauminhalt und Gesamtoberfläche des entstehenden Körpers?

Digitized by Google

5. Ein Quadrat mit der Seite $a = 11$ drehe sich um eine Seite. Wie groß sind Rauminhalt und Gesamtoberfläche des entstehenden Körpers?
6. Der Achsenschnitt eines Cylinders sei ein Quadrat. Berechne Rauminhalt und Mantel aus der Höhe $h = 0{,}4$.
7. Der Achsenschnitt eines Cylinders sei ein Rechteck von der Größe $f = 36$. Berechne seinen Rauminhalt aus der Höhe $h = 8$.
8. Der Umfang des Grundkreises eines Cylinders sei $u = 21$, seine Höhe sei $h = 8$. Wie groß ist der Rauminhalt?
9. Ein Rechteck mit den Seiten $a = 30$, $b = 9$ werde zu einem Cylindermantel umgebogen, dessen Höhe gleich b ist. Wie groß ist der Rauminhalt des Cylinders?
10. Der Mantel eines geraden Cylinders sei doppelt so groß als die beiden Grundflächen zusammen. Welche Beziehung findet zwischen dem Radius der Grundfläche r und der Höhe h statt? Wie groß sind Rauminhalt und Mantel, wenn $r = 13$ ist?
11. Einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma ist ein Cylinder umbeschrieben. Berechne Mantel und Rauminhalt des Cylinders
    1. aus der Grundkante $a = 1{,}2$ und der Seitenkante $s = 2{,}4$;
    2. aus dem kleinen Radius der Grundfläche $\varrho = 6$ und der Höhe $h = 21$.
12. Einem regelmäßigen zehnseitigen Prisma sei ein Cylinder ein- und umbeschrieben. Wie groß ist der von den beiden Cylindern begrenzte Raum, wenn das Prisma die Höhe $h = 10{,}5$ und seine Grundfläche den großen Radius $r = 6$ hat?

§ 46. Der Kegel.

1. Ein gerader Kegel ist gegeben. Zu berechnen:
   a) aus dem Radius der Grundfläche $r = 6$ und der Höhe $h = 8$ den Rauminhalt V und den Mantel M;

Digitized by Google

b) aus dem Radius $r = 9$ und der Seitenlinie $s = 15$ den Rauminhalt V und den Mantel M;

c) aus dem Radius $r = 8$ und dem Rauminhalte $V = 256$ die Höhe h;

d) aus dem Rauminhalte $V = 104$ und der Höhe $h = 10$ den Radius r;

e) aus der Seitenlinie $s = 26$ und der Höhe $h = 24$ den Rauminhalt V und den Mantel M.

2. Der Radius der Grundfläche eines Kegels sei $r = 60$, die Achse $g = 89$ bilde mit der Grundfläche den Neigungswinkel $\alpha = 64^0\,0'\,39''$. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

3. Die Höhe eines Kegels falle mit der Achse zusammen. Aus dieser Achse $a = 35$ und dem Winkel, den diese mit der Seitenlinie bildet, $p = 18^0\,55'\,29''$, soll der Rauminhalt berechnet werden.

4. Der Achsenschnitt eines Kegels sei ein gleichschenkliges Dreieck. Aus der Basis $g = 6{,}8$ und dem Winkel an der Spitze $\varepsilon = 78^0\,8'\,48''$ soll der Rauminhalt des Kegels berechnet werden.

5. Ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 30^0$ drehe sich um seine längere Kathete. Wie berechnet man den Rauminhalt des entstehenden Körpers

a) aus jener Kathete $a = 3$;

b) aus der Hypotenuse $f = 6$ des Dreiecks?

6. Ein gleichschenkliges Dreieck drehe sich um seine Höhe. Berechne den Rauminhalt und die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers aus der Höhe $h = 4$ und dem Schenkel $a = 5$ des Dreiecks.

7. Ein gleichseitiges Dreieck drehe sich um seine Höhe. Wie berechnet man den Rauminhalt und die Oberfläche des entstehenden Körpers

a) aus der Seite $k = 0{,}6$;

b) aus der Höhe $h = 2$ des Dreiecks?

Digitized by Google

8. Ein gleichseitiges Dreieck drehe sich um eine seiner Seiten.
   a) Wie berechnet man den Inhalt und die Oberfläche des entstehenden Körpers aus der Höhe des Dreiecks $h = 6$?
   b) Löse dieselbe Aufgabe unter Benutzung der für Rotationskörper geltenden Guldinschen* Regel: „Der Inhalt eines Rotationskörpers wird gefunden, wenn man die Größe der sich drehenden Fläche mit dem Wege multipliziert, den der Schwerpunkt beschreibt."
9. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 20$ und $b = 15$ dreht sich um seine Hypotenuse. Wie groß ist der Inhalt des entstehenden Körpers?
10. Ein Dreieck mit den Seiten $a = 52$, $b = 41$, $c = 15$ drehe sich um die Seite a. Wie berechnet man den Rauminhalt des entstehenden Körpers?
11. Ein Dreieck mit den Seiten $a = 78$, $b = 29$, $c = 101$ drehe sich um die Seite a. Wie berechnet man den Rauminhalt des entstehenden Körpers?
12. Der Umfang des Grundkreises eines eisernen Kegels sei $u = 37{,}2$ cm, seine Höhe $h = 9$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt und wie groß ist sein Gewicht? (Spec. Gew. des Eisens = 7.)
13. Man will einen gleichseitigen Kegel aus Ahornholz anfertigen, der 2 kg wiegen soll. Wie hoch und wie weit muß dieser Kegel werden? (Spec. Gew. des Ahorns = 0,76.)
14. Dem Grundkreise eines geraden Kegels, dessen Höhe $h = 8$ ist, ist ein Quadrat mit der Seite $a = 3$ einbeschrieben Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?
15. Einem gleichseitigen Kegel ist eine Pyramide einbeschrieben, deren Spitze in die Kegelspitze fällt und deren quadratische Grundfläche dem Grundkreise des Kegels einbeschrieben ist. Berechne aus dem Radius des Grundkreises $r = \frac{1}{2}$ den Inhalt des Kegels und der Pyramide.

---

* Guldin, deutscher Mathematiker, um 1630.

Digitized by Google

16. Einem geraden Kegel ist ein gerader Cylinder einbeschrieben, und zwar ist der eine Grundkreis des Cylinders dem Grundkreise des Kegels konzentrisch, während der andere in dem Kegelmantel liegt. Wie verhält sich der Inhalt des Cylinders zu dem des Kegels, wenn sich die Radien ihrer Grundflächen a) wie 1 : 2; b) wie 3 : 5 verhalten?

17. Ein gerader Kegel aus Blei hat eine Höhe von 1 dm, während seine Seitenlinie $1\frac{3}{5}$ mal so lang ist als der Radius seiner Grundfläche. Er soll in einen Cylinder umgegossen werden, dessen Höhe $1\frac{1}{2}$ mal so groß ist als der Radius seiner Grundfläche. Wie lang wird dieser Radius?

---

18. Die Grundkreise eines abgestumpften Kegels haben die Radien r bezw. ϱ, die Höhe beträgt h. Wie groß ist der Rauminhalt des Körpers, wenn 1. $r = 8$, $\varrho = 7$, $h = 9$; 2. $r = 0{,}6$, $\varrho = 0{,}4$, $h = 0{,}5$ ist?

19. Die Radien der Grundkreise eines geraden Kegelstumpfes seien gleich r bezw. ϱ, die Höhe gleich h. Berechne Rauminhalt und Mantel des Kegels, wenn 1. $r = 10$, $\varrho = 8$, $h = 5$; 2. $r = 1$, $\varrho = 0{,}7$, $h = 0{,}42$ ist.

20. Der Achsenschnitt eines Kegelstumpfes sei ein gleichschenkliges Trapez, dessen Parallelseiten $a = 18$, $c = 8$ und dessen nicht parallele Seiten $b = 13$ sind. Inhalt und Mantel des Körpers sollen berechnet werden.

21. Ein gleichschenkliges Trapez mit den Parallelseiten $a = 12$, $b = 8$ und der Höhe $h = 9$ drehe sich um seine Symmetrieachse. Wie groß ist der Rauminhalt des entstehenden Körpers?

22. Der Mantel eines geraden abgestumpften Kegels sei $1\frac{2}{3}$ mal so groß als die Differenz der beiden Grundflächen. Wie groß sind Rauminhalt und Mantel des Körpers, wenn die beiden Radien gleich 19 bezw. 10 sind?

§ 47. Die Kugel.

1. Inhalt und Oberfläche einer Kugel aus dem Radius r zu berechnen ($r = 6$; 0,7; 1,2).

Digitized by Google

2. Welchen Rauminhalt hat eine Halbkugel, deren Durchmesser $d = 20$ cm beträgt?
3. Den Radius einer Kugel aus der Größe der Oberfläche O zu berechnen ($O = 100$; 0,25).
4. Den Radius und die Oberfläche einer Kugel aus dem Inhalte V zu berechnen ($V = 1200$; 729; 0,343).
5. Der Umfang eines Hauptkreises eines Globus beträgt 94,25 cm. Wie groß ist der Radius des Globus? Wie groß ist seine Oberfläche?
6. Ein Halbkreis von der Größe $F = 20$ qcm drehe sich um seinen Durchmesser. Wie groß ist der Inhalt der entstehenden Kugel?
7. Ein Viertelkreis von der Größe $Q = 15$ qcm drehe sich um einen seiner Grenzradien. Wie groß ist der Inhalt des entstehenden Körpers?
8. Eine Kugel aus Messing hat einen Durchmesser von $d = 20$ cm. Wieviel kg wiegt sie? (Spec. Gew. von Messing $s = 8{,}5$.)
9. Eine eiserne Kugel wiegt 2 kg. Wie groß ist ihr Durchmesser? (Spec. Gew. von Eisen $s = 7$.)
10. Eine eiserne Hohlkugel hat einen äußeren Durchmesser von $2r = 16$ und eine Dicke von $d = 1$ cm. Wie groß ist der Rauminhalt der Eisenmasse? Wieviel wiegt sie?
11. Eine eiserne Kugel, deren Durchmesser $d = 10$ cm beträgt, wird in Wasser getaucht. Wieviel g Wasser verdrängt sie? Wieviel wiegt sie im Wasser?

---

12. Den Inhalt eines Kugelsegments aus der Höhe h und dem Kugelradius r zu berechnen. a) $h = \frac{8}{2}$, $r = 4$; b) $h = 0{,}2$, $r = 0{,}6$.
13. Die Höhe eines Kugelsegments sei gleich dem halben Kugelradius r. Wie groß ist a) das Segment; b) der zugehörige Sektor; c) die Kugelhaube; d) die Gesamtoberfläche des Sektors, wenn $r = 2$ ist?

Digitized by Google

14. Die Höhe eines Kugelsegments sei gleich $\frac{3}{4}$ des Kugelradius r. Berechne Segment, Sektor, Haube, Gesamtoberfläche des Sektors, wenn $r = 8$ ist.

15. Ein Schnittkreis einer Kugel habe den Radius $\varrho = 24$. Wie groß ist das abgeschnittene kleinere Segment, wenn der Kugelradius $r = 25$ beträgt?

16. Durch die Mitte eines Kugelradius werde senkrecht zu ihm eine Ebene gelegt. Wie verhalten sich die Inhalte der entstehenden Segmente zu einander?

17. Durch den stetigen Teilpunkt eines Kugelradius, der nach dem Mittelpunkte zu liegt, werde senkrecht zum Radius eine Ebene gelegt. Wie verhalten sich die Inhalte der entstehenden Kugelsegmente?

18. Ein Kreissektor, dessen Centriwinkel $\alpha = 30^0$ ist, drehe sich um einen seiner Grenzradien. Welchen Rauminhalt hat der entstehende Körper, wenn der Radius des Kreissektors $r = 1$ ist?

19. Ein Kugelausschnitt sei der achte Teil seiner Kugel.
    a) In welcher Beziehung steht seine Höhe zum Kugelradius?
    b) Wie kann man hieraus den Centriwinkel des Achsenschnittes des Ausschnitts berechnen?

20. Den wievielten Teil der Erdoberfläche konnten Biot und Gay-Lussac übersehen, als sie sich bei ihrer Luftreise (1804) eine geographische Meile über den Meeresspiegel erhoben hatten? (Erdradius = 6370 km; eine geograph. Meile = 7500 m.)

21. Wie groß ist der Centriwinkel des durch einen Kugelsektor gelegten Achsenschnittes, wenn die der Kugeloberfläche angehörende („sphärische") Begrenzung des Sektors a) gerade so groß; b) halb so groß; c) doppelt so groß als seine Kegelbegrenzung ist?

22. Der Centriwinkel des Achsenschnittes eines Kugelsektors sei $\alpha = 120^0$. Wenn nun der Kugelinhalt $k = 80$ ist, wie groß ist der Inhalt des Sektors?

Digitized by Google

23. Ein Kugelradius r werde in drei gleiche Teile geteilt und durch die beiden Teilpunkte werden senkrecht zu ihm Ebenen gelegt. a) Wie groß ist die von beiden Ebenen auf der Kugeloberfläche abgeschnittene Zone, wenn $r = 3$ ist? b) Wieviel mal so groß als diese Zone ist die Kugeloberfläche?

24. Wie groß ist auf jeder Erdhälfte a) die heiße; b) die gemäßigte; c) die kalte Zone? (Erdradius = 6370 km.)

25. Der Inhalt eines Kugelsegments sei gleich dem halben zugehörigen Sektor. In welcher Beziehung steht die Höhe des Segments zum Kugelradius? (Quadratische Gleichung.)

26. Ein Kugelsegment verhält sich zu dem Kegel, der mit ihm die Grundfläche gemeinsam hat und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, a) wie 4 : 5; b) wie 7 : 18; c) wie $m : n$. Wie hoch ist in jedem Falle das Segment, wenn $r = 1$ ist? (Quadratische Gleichung.)

---

27. Eine Bleikugel, die einen Durchmesser $d = 6$ cm hat, soll in einen gleichseitigen Kegel umgegossen werden. Wie groß sind Radius und Höhe dieses Kegels?

28. Eine Bleikugel von $a = 40$ g Gewicht soll in einen gleichseitigen Cylinder umgegossen werden. Wie groß wird der Radius dieses Cylinders?

29. Einem Quadrate, dessen Seite $a = 1$ cm lang ist, sei ein Kreis einbeschrieben. a) Die Figur möge sich um diejenige Symmetrieachse drehen, welche einer Seite parallel ist. Wie groß ist der Inhalt des entstehenden Cylinders und der Kugel? Wie groß ist der Inhalt des Raumes, der zwischen dem Cylinder und der Kugel liegt? b) Das Quadrat möge sich um eine Diagonale drehen. Wie groß ist der Raum, der zwischen den jetzt entstehenden Rotationskörpern liegt?

Digitized by Google

30. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 10$, dem ein Kreis um- und einbeschrieben ist, drehe sich um seine Höhe. a) Welchen Inhalt haben die drei entstehenden Rotationskörper? b) In welchem Zahlenverhältnis stehen ihre Inhalte zu einander?

31. Um und in eine Kugel ist ein gleichseitiger Kegel beschrieben. Wie verhalten sich a) die Inhalte; b) die Oberflächen der drei Körper?

32. Durch die Mitte eines Kugelradius $r = 4$ ist senkrecht zu ihm ein Schnittkreis gelegt. Verbindet man alle Punkte des Umfanges dieses Kreises mit dem Gipfel a) des größeren; b) des kleineren Kugelsegments, so umhüllen die Verbindungslinien einen Kegel, dessen Rauminhalt und Mantel berechnet werden sollen.

33. Demjenigen Schnittkreise einer Kugel, der den senkrecht zu ihm stehenden Radius halbiert, sei ein Quadrat einbeschrieben, dessen vier Ecken mit dem Gipfel a) des größeren; b) des kleineren Segments verbunden werden. Wie groß ist der Rauminhalt der entstehenden Pyramide?

34. Einer Kugel ist ein regelmäßiges vierseitiges Prisma umbeschrieben. Berechne den Rauminhalt und die Oberfläche der Kugel aus der Höhe des Prisma $h = 10$.

35. Einer vierseitigen Pyramide, deren Grund- und Seitenkanten die gleiche Länge $a = 12$ haben, ist eine Kugel einbeschrieben. Wie berechnet man den Radius der Kugel?

36. Einer regelmäßigen quadratischen Pyramide ist eine Kugel einbeschrieben. Wie berechnet man aus der Grundkante $a = 2$ und der Seitenkante $s = 5$ die Höhe der Pyramide und den Radius der Kugel?

37. Einem gleichschenkligen Trapez ist ein Kreis einbeschrieben. Dreht sich die Figur um ihre Symmetrieachse, so beschreibt sie eine von einem abgestumpften Kegel berührte Kugel.

Digitized by Google

Wie groß ist der Rauminhalt der beiden Rotationskörper, wenn man von dem Trapez die beiden parallelen Seiten $a = 8$ und $b = 2$ kennt?

38. Einer Kugel vom Radius r ist ein gerader Cylinder einbeschrieben, dessen Radius gleich dem dritten Teil des Kugelradius ist. Wie groß ist der Rauminhalt des Cylinders, wenn $r = 15$ ist?

Digitized by Google

HW 2182 U

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Holzmüller, Dr. Gustav, Direktor der Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Krystallographie und Kartographie. [Mit 16 lithographierten Tafeln.] [VI u. 102 S.] gr. 8. 1886. kart. *M.* 4.40.

Huebner, Dr. L., Oberlehrer am Gymnasium zu Schweidnitz, ebene und räumliche Geometrie des Maſses in organischer Verbindung mit der Lehre von den Kreis- und Hyperbelfunktionen neu dargestellt. [XVI u. 340 S.] gr. 8. 1888. geh. n. *M.* 8.—

Kober, Dr. Julius, Direktor der Realschule zu Groſsenhain, Leitfaden der ebenen Geometrie, mit über 700 Übungssätzen und Aufgaben und 32 in den Text gedruckten Figuren. 2. Aufl. [86 S.] gr. 8. 1884. geh. *M.* 1.—

Lucke, Franz, Gymnasiallehrer in Zerbst, Leitfaden der Stereometrie für den Schulunterricht. Mit neun lithographierten Tafeln. [X u. 204 S.] gr. 8. 1890. geh. *M.* 2.80.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weiſsenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. 2 Teile. gr. 8. 1881. geh. *M.* 3.80.

Einzeln: I. Teil. Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 128 S.] *M.* 2.—
II. — Stereometrie. I. Heft: Lehrbuch. Mit 37 Holzschnitten im Text. [VI u. 46 S.] *M.* —.80.
II. — Übungsbuch. Mit 4 Figurentafeln. [IV u. 58 S.] *M.* 1.—

———— elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. 1882. geh. *M.* 8.80.

———— elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. Mit vielen Figuren im Text. [X u. 135 S.] gr. 8. 1883. geh. n. *M.* 3.60.

Müller, Dr. Hubert, Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum in Metz, Leitfaden der ebenen Geometrie. Mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. In zwei Teilen. Erster Teil [in zwei Heften] und mit einem Anhange. gr. 8. geh. *M.* 2.80.

Einzeln: I. Teil. 1. Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. Mit Übungen. 3. umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text und zwei lithograph. Tafeln.) [VIII, 69 u. 49 S.] 1889. *M.* 1.60.
2. — Erweiterungen zu Teil I und Einleitung in die neuere Geometrie. Mit Übungen. (Mit vielen Holzschnitten im Text u. 2 lithogr. Tafeln.) [36 u. 34 S.] 1878. *M.* 1.20.
II. Teil. Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. [VI u. 111 S. mit vielen eingedruckten Holzschnitten.] 1875. *M.* 1.60.

———— Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. In zwei Teilen. Erster Teil: Die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen. Mit zahlreichen Holzschnitten und 3 Tafeln. [VIII u. 127 S.] gr. 8. 1877. geh. *M.* 2.—

Rausenberger, Dr. Otto, die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. [VI u. 236 S.] gr. 8. 1887. geh. *M.* 5.—

Reidt, Dr. Friedrich, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 7.—

Einzeln: I. Teil. Trigonometrie. [illegible] *M.* 4.—
II. — Stereometrie. [illegible] *M.* 3.—

Digitized by Google

Reidt, Dr. **Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 2.80.

Einzeln:

I. Teil. Trigonometrie. 3. Aufl. [84 S.] 1885. *M.* 1.80.
II. — Stereometrie. 3. Aufl. [48 S.] 1886. *M.* 1.—

——— die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VIII u. 50 S.] gr. 8. 1882. kart. *M.* 1.20.

Reishaus, Dr. **Th.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Stralsund, Vorschule zur Geometrie. 2 Abteilungen. gr. 8. 1879. geh. *M.* 3.20.

Einzeln:

I. Abt. Lehrbuch. [Mit vielen Figuren im Text.] [IV u. 134 S.] *M.* 2.—
II. — Wiederholungs- und Aufgabenbuch. [Mit vielen Figuren im Text.] [86 S.] *M.* 1.20.

Schilke, Dr. phil. **E.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i./L., Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. [IV u. 54 S.] gr. 8. 1890. kart. *M.* 1.—

Schlömilch, Dr. **Oskar**, Geh. Schulrat im Königl. Sächsischen Kultusministerium, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maſses. Ein Lehrbuch. gr. 8. geh. *M.* 7.60.

Einzeln:

I. Heft. Planimetrie. 7. Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 163 S.] 1888. *M.* 2.—
II. — Ebene Trigonometrie. 6. Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 97 S.] 1883. *M.* 1.60.
II. Teil. Geometrie des Raumes. 3. Auflage. [VII u. 266 S.] 1874. *M.* 4.—

Heft I und II bildeten früher den I. Teil; der II. Teil wird bei der nächsten Auflage in Heft III und IV zerfallen.

Schotten, Dr. **Heinrich**, Lehrer am Kgl. Gymnasium zu Hersfeld, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. gr. 8. 1890. geh.

Schüller, **W. J.**, Seminarlehrer in Boppard a/Rh., Verknüpfung einfacher Raumgebilde mit dem Rechnen. gr. 8. 1890. geh. (Ung. 4 Bogen.)

Schulze, Dr. **Karl**, Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg, Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- u. Realschulen. 2 Hefte. Mit Figuren im Text. gr. 8. kart.

Einzeln:

I. Heft. Trigonometrie. [VIII u. 72 S.] 1890. kart. *M.* 1.20.
II. — Stereometrie. [IV u. 60 S.] 1890. kart.

Thieme, Dr. **H.**, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluſs an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1885. kart. *M.* 1.20.

Zehme, Dr. **W.**, Direktor der höheren Gewerbeschule zu Barmen, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen, sowie zum Selbstunterrichte. 6. Auflage. Mit 15 lithographierten Tafeln in besonderem Heft. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1880. geh. *M.* 2.40.

Zeuthen, **H. G.**, Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. [VI u. 97 S.] gr. 8. 1882. geh. *M.* 2.—

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google